

FINTERPO 2.1



**Funciones de interpolación para análisis de
problemas de tensión y deformación plana con
elementos monodimensionales, triangulares y
rectangulares, placa plana y cuerpo
axilsimétrico, por el**

Método Matricial de los Elementos Finitos.

© 2.003-10 José Manuel Gómez Vega. ETSII – UNED.

ingenieroindustrialmecanico@gmail.com

gomezvega@hotmail.com

<http://members.fortunecity.es/etsii/>

***Manual de usuario en castellano del programa para
las supercalculadoras***

Texas Instruments 92 plus /

Voyage 200,

ÍNDICE.

1. [Presentación.](#)
2. [Garantía.](#)

3. [¿Qué hace Finterpo v.1.1?](#)
4. [Historia del programa. Por qué se decidió hacer.](#)
5. [Instalación, memoria, uso.](#)
6. [Sistema de coordenadas y convención de signos.](#)
7. [Unidades empleadas.](#)
8. [Utilizando Finterpo con ejemplos.](#)
9. [Detección de errores.](#)
10. [Versiones previas.](#)
11. [Advertencias \(Internal Error y variables simbólicas\).](#)
12. [Créditos.](#)
13. [Licencia.](#)

[Inicio
página](#)

1.-Presentación.

[Siguiente](#)

El programa **Finterpo v.1.1** realiza cálculos numéricos y simbólicos de elementos estructurales en dos dimensiones a nivel académico de ingeniería o arquitectura mediante el método de la rigidez, PASO A PASO una vez realizados todos los cálculos internamente. Abarca elementos monodimensionales (dos, tres, cuatro nodos y definido por el usuario), triangulares (tres, cuatro, seis o diez nodos), rectangulares (cuatro, cinco, seis, ocho, nueve, doce nodos o con dos subelementos triangulares), elementos placa plana, elementos de cuerpo axilsimétrico (triangular o rectangular).

El autor de Finterpo v.1.1 es José Manuel Gómez Vega, ingeniero industrial en mecánica de máquinas. Todas las rutinas y subprogramas son copyright del propio autor y **esta versión es para uso libre y gratuito**, con el fin de permitir el desarrollo de cálculos entre los estudiantes de Análisis de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos dentro de las carreras técnicas. Sin embargo **está prohibida la alteración o modificación de cualquiera de los programas que integran Finterpo sin el consentimiento previo del autor, así como la distribución del mismo con fines lucrativos en cualquier formato**. La inclusión del programa en páginas de Internet para divulgarlo es libre, aunque agradecería una comunicación mediante E-mail para mi conocimiento.

La presentación es inmejorable, realiza los procesos paso a paso y los cálculos pueden hacerse de forma numérica o simbólica. Junto a los cálculos numéricos o con variables simbólicas siempre van asociadas en las respuestas las fórmulas o ecuaciones genéricas, que sirven de ayuda para la comprensión de lo calculado de forma inmediata o posterior. Evidentemente, el conocimiento previo teórico del cálculo matricial de estructuras para elementos de este tipo es indispensable para la comprensión de lo que va haciendo el programa aún siendo explícitamente clarificador.

Los cálculos obtenidos se pueden cambiar entre las diferentes presentaciones de modos: decimales (FIX, FLOAT), exactitud (AUTO, EXACTO, APROXIMADO) y exponencial (NORMAL, CIENTÍFICO, INGENIERÍA), de tal forma que siempre y en cualquier momento podemos cambiar la presentación de cualquier resultado y luego volverla a poner como se quiera y esto por supuesto dentro del programa y sin salir del mismo, repitiendo la operación cuantas veces se desee hacer.

En todo momento se ha pretendido hacer un programa de objetivo múltiple, pues abarca un sinfín de problemas de este campo de las estructuras, de tal forma que se pueden conseguir incluso obtener funciones de forma (o de interpolación), mediante la introducción por parte del usuario de ciertos puntos, que en un problema manual tendríamos que hacerlo aparte: este programa lo calcularía internamente.

Finterpo v.1.1 permite corregir todo y cada uno de los datos en cualquier momento, pudiéndose recalcular resultados sobre los ya existentes, reintroduciendo el mínimo de información.

Como idea previa de la potencia del programa se dirá que la filosofía en la elaboración del mismo ha sido **“hágase un programa para resolver problemas de elementos estructurales *paso a paso*”**. Programas de elementos estructurales para calculadoras hay muchos, pero como éste, según podrá apreciar el usuario, no hay nada parecido. Además en este campo concreto de elementos estructurales por el M.E.F no he visto ninguno.

Esto se puede resumir en grandes cualidades que posee:

- 1) Presenta en menús todos los cálculos pormenorizados con las fórmulas en su forma matemática natural.
- 2) Pueden hacerse cálculos manteniendo ciertas variables simbólicas y otras con valores numéricos, o bien todas con valores numéricos o

todas con variables simbólicas. Es un programa versátil, admite todo tipo de cálculo.

- 3) Puede calcular las integrales definidas y las numéricas de valores como [K], [B], etc. Los tipos de puntos que se elijan para el cálculo de la integral numérica son seleccionables.

Evidentemente, la información se ofrece si se requiere, por lo que está presentada en cómodos menús. El programa ya ha calculado todo el problema cuando presenta el Menú de Resultados, excepto la matriz de rigidez [K] debido a que en algunos casos tarda un rato, además de los valores de integración numérica de varias variables.

El programa está preparado para no admitir ciertos valores, o bien dirigir a otra parte para que no se produzca una salida indeseada. Aún así pueden existir situaciones no descubiertas que origine una interrupción por entrada errónea; sin embargo, se ha puesto el máximo empeño en que esto no suceda, aun a costa de sacrificar algo la rapidez de ejecución de los cálculos y el alargamiento del grupo de programas que conforman **Finterpo**. No obstante cabe advertir que el grado de robustez de este programa queda lejos de otro gran programa realizado por mí como es **Anesmef**. No se han tenido ciertas precauciones en la introducción de datos, como por ejemplo, definir b o c como valores de posición de coordenadas, que dará error pues b y c son matrices de cálculo.

Este programa calcula problemas-tipo a los estudiados en Análisis de Estructuras por el Método Matricial de Elementos Finitos en el nivel de 4º curso de la carrera de Ingeniería Industrial por la Universidad Nacional de Educación a Distancia de España.

El autor ha dedicado mucho tiempo a la elaboración del mismo y piensa que es una versión definitiva. Considero, no obstante que si se descubre algún error, será mejorado.

Anterior	2.-Garantía.	Siguiente
--------------------------	---------------------	---------------------------

Durante las innumerables pruebas realizadas en el programa final y en los proyectos previos he corregido numerosos errores. Es posible que exista algún error oculto más, por lo que si alguien lo encuentra le agradecería enormemente lo comunicara a la siguiente dirección:

gomezvega@hotmail.com

detallando suficientemente el tipo de error para poder corregirlo.

Puedo garantizar que con este programa nunca he tenido un cuelgue general de memoria con necesidad de vaciar la memoria (resetear) de la calculadora (¡y menos mal pues trabajaba con todos los subprogramas no archivados para comprobar los errores, lo que me hubiera llevado a la destrucción de dichos programas, a pesar de que regularmente hacía copias de seguridad en el ordenador!) y ello debido a que trabajo mejor con la calculadora que con el emulador.

El programa no tiene garantías, se presenta *tal cual*. El autor no se responsabiliza de cualquier problema surgido al manejar el grupo de programas de Finterpo, no se hace cargo de ningún daño causado por pérdida de datos o de error en el manejo de los mismos. Se recomienda hacer una copia de seguridad de la calculadora antes de instalarlo o bien, probarlo antes con un emulador para la calculadora como el programa emulador Vti 2.5 (o versiones mejoradas).

Anterior	3.-¿Qué hace FINTERPO v. 1.1?	Siguiente
--------------------------	--------------------------------------	---------------------------

Aunque ya se ha comentado antes, el programa efectúa cálculos de elementos estructurales aplicando la metodología del Método de los Elementos Finitos. La aplicación del método debería ser conocido por el usuario, pues este programa calcula elementos estructurales pero no enseña el método, aunque muestre los resultados paso a paso y con muchos detalles, con lo que un estudiante de Estructuras que no haya visto esta parte del temario es preferible que no use el programa hasta que no estudie un manual de dicho procedimiento de cálculo. El libro en el que me basé para el estudio de este apartado es: "Teoría General del M.E.F", editorial UNED, de D. Ramón Álvarez y D. Juan José Benito y un grupo de ejercicios de exámenes de cursos anteriores. No me basé en ninguna otra bibliografía.

En el programa es preciso dar información mediante datos que se introducen cuando se requiere. He intentado poner los menús lo más cómodamente posible para que no existan errores de mala interpretación a la hora de efectuar los ingresos de los datos.

Finterpo, en definitiva, calcula problemas numéricos y simbólicos de elementos estructurales ofreciendo la posibilidad de realizar el proceso paso a paso, siguiendo los procedimientos de los menús de resultados que incorporan las fórmulas en presentación “pretty print” (modo de presentación matemático natural).

Anterior	4.- Historia del programa. Por qué se decidió hacer.	Siguiente
--------------------------	---	---------------------------

El programa lleva ya muchas mejoras, aunque hasta ahora no ha visto la luz. Se me ocurrió pensando en hacer los problemas de la asignatura de Análisis de Estructuras de la ETSII de la UNED de la parte final del 2º parcial. Empecé a gestarlo en abril del 2004 y desde entonces he mejorado muchas cosas, tantas que sería incapaz de reproducirlas. Lo que sí que me llamó la atención era la inexistencia de programas para la TI 92 plus que me valiesen para mis propósitos: entonces decidí hacer yo el programa.

Este programa es *multiproblema*: permite trabajar con varios problemas en la memoria de la calculadora. El paso de uno a otro es muy sencillo, y los problemas se pueden archivar en un ordenador personal. Las carpetas de almacenamiento de problemas comenzarán con Fint y pueden tener 4 letras ó números, que son realmente carpetas de la calculadora generadas por el usuario, donde se introducen (o generan) los datos básicos para realizar los cálculos. La cantidad de problemas en la calculadora depende de la extensión de los mismos y de la memoria de la calculadora.

Este programa se terminó en noviembre de 2.008. Tan sólo quedaba por realizar el manual y algunos pequeños retoques en el código del programa.

Anterior	5.-Instalación, memoria, uso.	Siguiente
--------------------------	--------------------------------------	---------------------------

El programa se instala en la carpeta FINTERPO. La instalación se realiza manualmente mediante el envío de 3 archivos de grupos de programas. El programa FITPDEL algunos de los datos introducidos en la memoria para los problemas en las carpetas Fint # # # # , pero no borra los programas que necesita FINTERPO. Debido a la gran cantidad de problemas diferentes que puede calcular, pueden aparecer bastantes variables en memoria. No he tenido el tiempo suficiente para actualizar el programa de borrado FITPDEL, por lo que mi mayor recomendación sería usar VAR-LINK, seleccionando el problema en memoria y borrarlo así. En este caso, es lo mejor. No obstante,

si se emplea el programa de borrado hará compatible el nuevo problema con los nuevos datos pues si queda alguno en memoria no será crítico. Los requisitos de memoria son bastante exigentes. Este programa ofrece todos los cálculos de manera pormenorizada, por lo que necesita una enorme cantidad de datos (y por ende unos mayores recursos de memoria).

Para tener la máxima capacidad de memoria se deben archivar todos los subprogramas en la carpeta FINTERPO. El grupo de archivos se presenta en 1 carpeta de grupo: *Finterpo*

La instalación detallada del programa es como sigue:

1. Si se instala en la calculadora:

El grupo de archivos se envía a la calculadora. Si aparecen con la protección LOCK, vaya a VAR-LINK, los seleccionamos todos y le damos a UNLOCK (F1 y tecla 7). Seguidamente para archivar vaya a VAR-LINK y seleccione mediante F4 la carpeta FINTERPO, y luego F1- y la tecla 8 (Archive).

2. Si se instala en el emulador Vti 2.5 (u otro similar):

Se puede proceder como lo dicho para la calculadora o bien cargar el estado *Finterpo.sav* que contiene en la memoria todos los programas listos para ejecutarse en el emulador, directamente.

Los programas están protegidos contra escritura mediante el programa PROT92P (Protector 92+ v1.0), conseguido en la página de <http://www.ticalc.org/pub/92plus/> , por lo que una vez realizadas las operaciones anteriores si intentamos ejecutar el programa *Finterpo* () (y *ENTER*) aparecerá en pantalla el mensaje "*Internal Error*". Para finalizar con la instalación deberemos hacer un *Reset* a la calculadora no sin antes tomar la precaución de realizar una copia de seguridad de todos los programas y datos que hay en la calculadora, o bien un archivado general de todos estos programas previos, pues en caso contrario se borrarán de la memoria. Una vez realizado lo antedicho, la forma válida única de proceder a hacer el *Reset* es presionar y mantener pulsadas las teclas 2nd + Lock (Hand) + On. Tras realizar dicha operación, ya se puede correr el programa normalmente, y si los programas previos fueron archivados permanecerán en memoria mientras que todo lo que no fuese archivado se borrará, por lo que se debe prestar especial atención a que esto no ocurra, habiendo de tomar todo el tiempo necesario para no perder datos por despiste o prisas.

Gracias al programa Prot92P los subprogramas corren adecuadamente, pues de lo contrario ralentizarían su ejecución y habría que hacer un archivado manual una vez ejecutado cada uno de los subprogramas. Realmente la opción de incluir la protección ha sido mayormente por esto, pues otras alternativas eran peores.

Anterior	6.-Sistema de coordenadas y convención de signos.	Siguiente
--------------------------	--	---------------------------

Normalmente se sigue en la numeración de los nodos el sentido antihorario que confiere a las matrices un giro positivo, es decir, que sus términos son los reales con sus signos correspondiente. Si establecemos arbitrariamente el sentido de giro horario, sucede que, por ejemplo, en la matriz de rigidez [K], cada uno de los términos tiene el signo contrario, o dicho de otra forma, la matriz está multiplicada por (-1). No obstante en elementos rectangulares con dos subelementos triangulares he dado la posibilidad de elegir el sentido. El motivo no es otro que la observación de un problema en el que el sentido de los nodos era caótico: un triángulo tenía los nodos orientados en sentido antihorario y el otro en sentido horario.

Por otra parte, en elementos rectangulares (por ejemplo) de más de 4 nodos, se indican las diferentes posibilidades de ubicación del resto de nodos superiores a 4. Para elementos triangulares de más de 3 nodos, se da la posibilidad de elegir los nodos correlativos o alternados, según los nodos referencia de los vértices.

Como el caso de los elementos rectangulares de dos subelementos triangulares es algo complejo, he dedicado un problema resuelto para aclarar cómo se calcularía, pues la numeración de los nodos puede ser problemática si no se explica bien en este caso. Podría haberlo hecho de otro modo, pero ésta fue la forma más económica de cálculo posible. Se detallará.

Anterior	7.-Unidades empleadas.	Siguiente
--------------------------	-------------------------------	---------------------------

Se puede emplear cualquier sistema de unidades siempre que estén en coherencia entre las mismas. He optado por no incluir sistemas de unidades en los menús de introducción de datos.

Si un usuario tiene un problema en el que aparece (por ejemplo) el módulo elástico E en unidades de kg/cm^2 , y las distancias nodales en metros, puede pasar las distancias a cm o bien el módulo E a T/m^2 . Olvidarse de

esto, evidentemente, da lugar a resultados inesperados e incorrectos que el programa no puede detectar, por lo que siempre habrá que tener cuidado en la introducción de datos consistentes en unidades.

[Anterior](#)
8.- Utilizando Finterpo con ejemplos.
[Siguiente](#)



Finterpo en acción. Videos de ejecución del programa

Preparativos antes de comenzar a introducir datos...

El problema de cálculo debe ser dibujado en un papel, debiendo aparecer los elementos, los nodos, sus distancias, cargas, coeficientes, para pasarlos al programa y en los términos de la calculadora. De momento, los elementos y los nodos deben ser términos numéricos. No se debe olvidar pasar todo a un sistema de unidades y a sus múltiplos o submúltiplos correspondientes. Empiécese a observar esto ANTES DE INTRODUCIR LOS DATOS EN LA CALCULADORA.

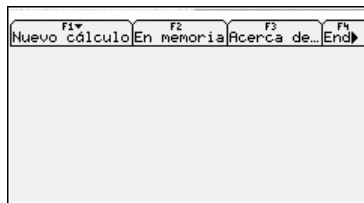
Arrancando el programa. Menú de Inicio...

Comencemos un nuevo problema: necesitamos introducir los datos. No indicaremos ahora un problema particular, pues las indicaciones son para manejar el programa y ningún tipo de problema cubre todas las opciones disponibles, por lo que lo siguiente es una descripción general de los menús y el funcionamiento de Finterpo.

En la línea de entrada de la pantalla Home se pone: finterpo\finterpo(). La carpeta de partida puede ser cualquiera. Nos encontramos con el Menú de Inicio.

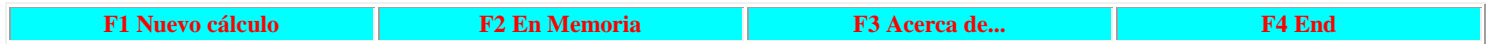
Menú Inicio

Nada más arrancar el programa y tras pasar la pantalla de presentación, se ofrece lo siguiente:



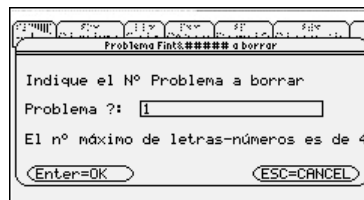
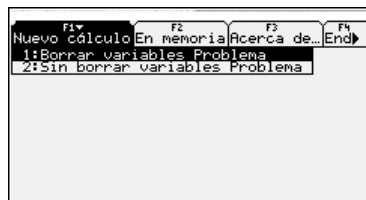
que es la pantalla de presentación del programa.

En la barra de Menú de Inicio hay 4 opciones:



F1 Nuevo cálculo:

- 1. Borrar variables Problema.** Seleccionando esta opción se borran las variables del problema (es necesario que haya alguno guardado previamente en memoria).
- 2. Sin borrar variables Problema.** Se inicia un problema sin borrar ninguno previo, un problema nuevo.



Si el problema en memoria no existe, comenzará un nuevo problema. En caso de que si exista lo borrará.

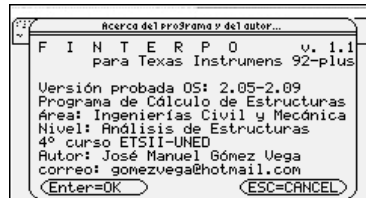


F2 En memoria:

- 1. Recalcular todo.** Se recalcula todo nuevamente con los datos en memoria (si los hay, pues en caso que no, se deberá introducir un nuevo problema)

2. Directo a resultados. Se pasa directamente a resultados. Esta opción es únicamente válida si existen datos guardados, por lo que un mensaje aparecerá invitando a hacer un nuevo cálculo si no los hubiere.

 **F3 Acerca de...:** Detalle del programa, versión y del autor.



 **F4 Salir:** Sale del programa.

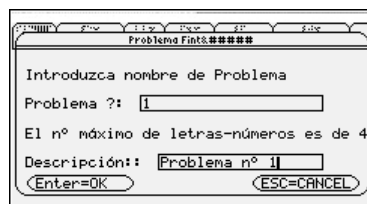
Seleccionando nombre para el problema...

Hay que elegir un nombre para el problema. Serán del tipo Fin # # # # #, donde cada valor de los 5 # pueden ser números o letras. El programa nos dirá si el problema elegido es válido o ya está en memoria (y habrá que elegir otro).

Todos los datos de problemas se ubicarán en una carpeta que se definirá a continuación. Los cálculos se harán en **PROBLEMAS**. Un problema es una carpeta con la denominación FIN&# # # # #, donde los 5 espacios están reservados para números y letras que definirán el problema. Si un nombre de carpeta de problema es no permitido, el programa lo advertirá indicando que se introduzca uno correcto. Una vez calculado el problema, se puede pasar al ordenador o mantener en la calculadora con otros problemas. Los archivos de cada problema son los mínimos para mostrar todos los datos y una vez cargados en memoria, los resultados se ofrecen en un segundo, que es lo que se tarda en ir al Menú Resultados desde el comienzo. Se puede dar una breve descripción del problema para recordar de donde se ha obtenido (libro, examen,...). Se almacena en la variable *info*.

Ejemplos de Problemas (son carpetas de TI 92 plus, máximo 8 caracteres)	Ejemplo de Descripción (en variable <i>info</i>)	Introducción en la calculadora
Fin1	Problema nº 1 de examen de Análisis de Estructuras, febrero 2004 (1a. semana)	1

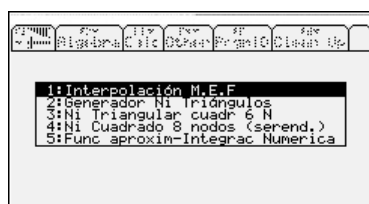
FinPro10	Problema nº 10 de Teoría General del MEF de J. J. Benito y R. Álvarez	Pro10
----------	--	-------



Seleccionando el tipo de estructura...

Una vez seleccionado el nombre del problema (en el ejemplo de la fig. anterior sería Fin1), aparecerá la siguiente pantalla con el siguiente

Menú de cálculos de FINTERPO.

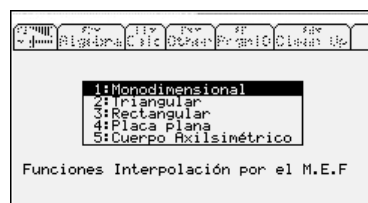


1. Interpolación M.E.F.
2. Generador Ni triángulos.
3. Ni Triangular cuadr. 6 N.
4. Ni Cuadrado 9 nodos (serend.)
5. Func aproxim-Integrac Numérica.

Pasemos directamente a describir los menús con ejemplos.

1. Interpolación M.E.F.

Tras pulsar o seleccionar esta opción aparece en pantalla lo siguiente:



Debe elegir entre las siguientes formas geométricas:

1. Monodimensional.
2. Triangular.
3. Rectangular.
4. Placa plana.
5. Cuerpo Axilsimétrico.

1. Monodimensional.

Ejemplo 1.

Obtener razonadamente las funciones de interpolación en coordenadas naturales ξ correspondientes al elemento isoparamétrico barra de celosía de tres nodos indicado en la figura, así como la matriz [B] de deformaciones-desplazamientos nodales, calculando el jacobiano de la transformación.

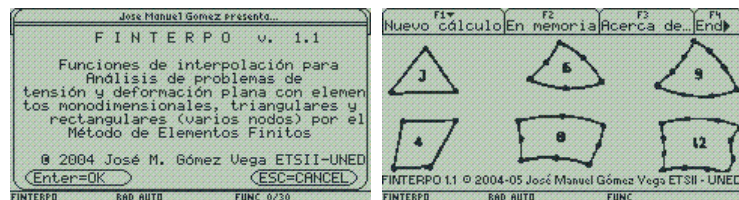
Se recuerda que el operador diferencial de relación deformaciones-desplazamientos es en este caso:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

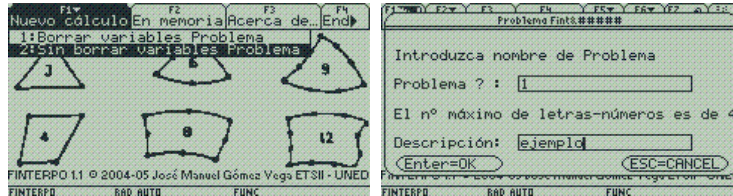
(Problema n° 13 de "Teoría General del MEF" de la UNED).

Solución con FINTERPO.

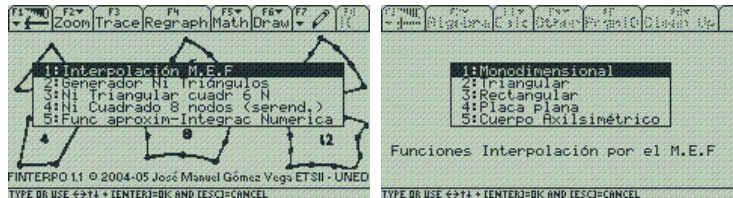
Pantalla de presentación:



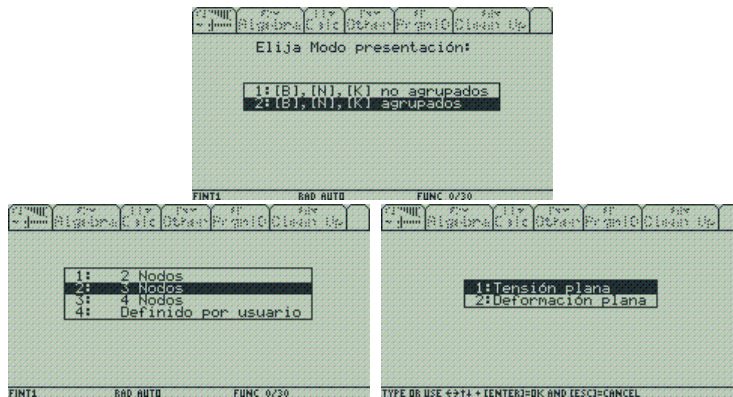
Introducción del problema sin borrar variables de problema anterior:



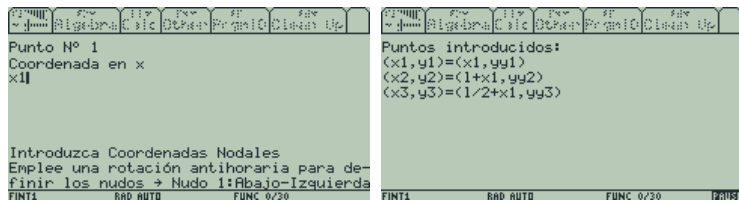
Elegimos interpolación MEF monodimensional:



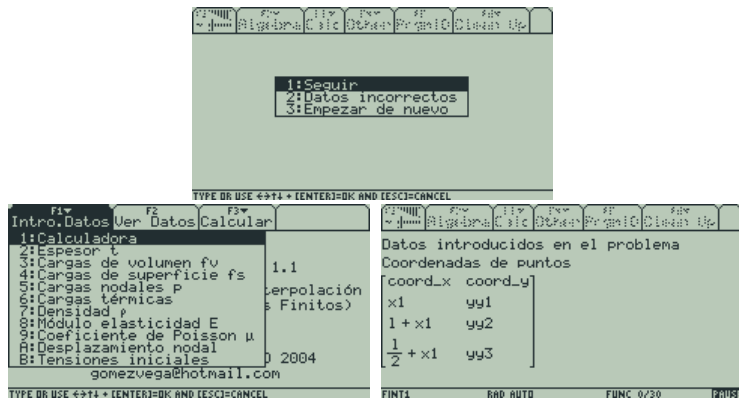
Introducimos las coordenadas y vemos los puntos introducidos.



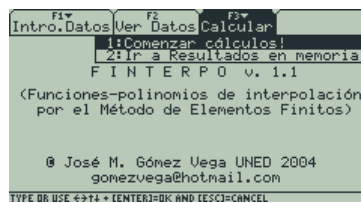
En este caso al tratarse de un elemento monodimensional, (elemento barra), las coordenadas en y son ignoradas:



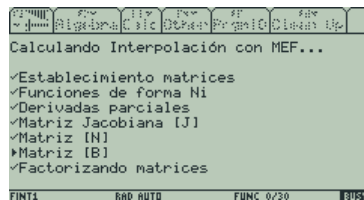
Seguimos, aunque podemos volver a introducir datos o empezar de nuevo.



En este problema no hay que introducir más datos por lo que comenzamos los cálculos:



El programa empieza a calcular y se observa en pantalla el proceso:



Cálculo de las coordenadas cartesianas en función de las coordenadas naturales:

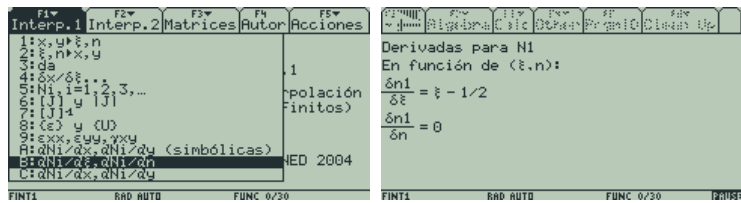


Cálculo de las coordenadas naturales en función de las coordenadas cartesianas:

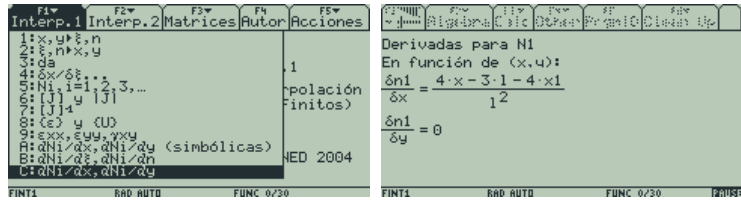


Cálculo de las derivadas parciales de las coordenadas:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	F17	F18	F19	F20	F21	F22	F23	F24	F25	F26	F27	F28	F29	F30	F31	F32	F33	F34	F35	F36	F37	F38	F39	F40	F41	F42	F43	F44	F45	F46	F47	F48	F49	F50	F51	F52	F53	F54	F55	F56	F57	F58	F59	F60	F61	F62	F63	F64	F65	F66	F67	F68	F69	F70	F71	F72	F73	F74	F75	F76	F77	F78	F79	F80	F81	F82	F83	F84	F85	F86	F87	F88	F89	F90	F91	F92	F93	F94	F95	F96	F97	F98	F99	F100	F101	F102	F103	F104	F105	F106	F107	F108	F109	F110	F111	F112	F113	F114	F115	F116	F117	F118	F119	F120	F121	F122	F123	F124	F125	F126	F127	F128	F129	F130	F131	F132	F133	F134	F135	F136	F137	F138	F139	F140	F141	F142	F143	F144	F145	F146	F147	F148	F149	F150	F151	F152	F153	F154	F155	F156	F157	F158	F159	F160	F161	F162	F163	F164	F165	F166	F167	F168	F169	F170	F171	F172	F173	F174	F175	F176	F177	F178	F179	F180	F181	F182	F183	F184	F185	F186	F187	F188	F189	F190	F191	F192	F193	F194	F195	F196	F197	F198	F199	F200	F201	F202	F203	F204	F205	F206	F207	F208	F209	F210	F211	F212	F213	F214	F215	F216	F217	F218	F219	F220	F221	F222	F223	F224	F225	F226	F227	F228	F229	F230	F231	F232	F233	F234	F235	F236	F237	F238	F239	F240	F241	F242	F243	F244	F245	F246	F247	F248	F249	F250	F251	F252	F253	F254	F255	F256	F257	F258	F259	F260	F261	F262	F263	F264	F265	F266	F267	F268	F269	F270	F271	F272	F273	F274	F275	F276	F277	F278	F279	F280	F281	F282	F283	F284	F285	F286	F287	F288	F289	F290	F291	F292	F293	F294	F295	F296	F297	F298	F299	F300	F301	F302	F303	F304	F305	F306	F307	F308	F309	F310	F311	F312	F313	F314	F315	F316	F317	F318	F319	F320	F321	F322	F323	F324	F325	F326	F327	F328	F329	F330	F331	F332	F333	F334	F335	F336	F337	F338	F339	F340	F341	F342	F343	F344	F345	F346	F347	F348	F349	F350	F351	F352	F353	F354	F355	F356	F357	F358	F359	F360	F361	F362	F363	F364	F365	F366	F367	F368	F369	F370	F371	F372	F373	F374	F375	F376	F377	F378	F379	F380	F381	F382	F383	F384	F385	F386	F387	F388	F389	F390	F391	F392	F393	F394	F395	F396	F397	F398	F399	F400	F401	F402	F403	F404	F405	F406	F407	F408	F409	F410	F411	F412	F413	F414	F415	F416	F417	F418	F419	F420	F421	F422	F423	F424	F425	F426	F427	F428	F429	F430	F431	F432	F433	F434	F435	F436	F437	F438	F439	F440	F441	F442	F443	F444	F445	F446	F447	F448	F449	F450	F451	F452	F453	F454	F455	F456	F457	F458	F459	F460	F461	F462	F463	F464	F465	F466	F467	F468	F469	F470	F471	F472	F473	F474	F475	F476	F477	F478	F479	F480	F481	F482	F483	F484	F485	F486	F487	F488	F489	F490	F491	F492	F493	F494	F495	F496	F497	F498	F499	F500	F501	F502	F503	F504	F505	F506	F507	F508	F509	F510	F511	F512	F513	F514	F515	F516	F517	F518	F519	F520	F521	F522	F523	F524	F525	F526	F527	F528	F529	F530	F531	F532	F533	F534	F535	F536	F537	F538	F539	F540	F541	F542	F543	F544	F545	F546	F547	F548	F549	F550	F551	F552	F553	F554	F555	F556	F557	F558	F559	F560	F561	F562	F563	F564	F565	F566	F567	F568	F569	F570	F571	F572	F573	F574	F575	F576	F577	F578	F579	F580	F581	F582	F583	F584	F585	F586	F587	F588	F589	F590	F591	F592	F593	F594	F595	F596	F597	F598	F599	F600	F601	F602	F603	F604	F605	F606	F607	F608	F609	F610	F611	F612	F613	F614	F615	F616	F617	F618	F619	F620	F621	F622	F623	F624	F625	F626	F627	F628	F629	F630	F631	F632	F633	F634	F635	F636	F637	F638	F639	F640	F641	F642	F643	F644	F645	F646	F647	F648	F649	F650	F651	F652	F653	F654	F655	F656	F657	F658	F659	F660	F661	F662	F663	F664	F665	F666	F667	F668	F669	F670	F671	F672	F673	F674	F675	F676	F677	F678	F679	F680	F681	F682	F683	F684	F685	F686	F687	F688	F689	F690	F691	F692	F693	F694	F695	F696	F697	F698	F699	F700	F701	F702	F703	F704	F705	F706	F707	F708	F709	F710	F711	F712	F713	F714	F715	F716	F717	F718	F719	F720	F721	F722	F723	F724	F725	F726	F727	F728	F729	F730	F731	F732	F733	F734	F735	F736	F737	F738	F739	F740	F741	F742	F743	F744	F745	F746	F747	F748	F749	F750	F751	F752	F753	F754	F755	F756	F757	F758	F759	F760	F761	F762	F763	F764	F765	F766	F767	F768	F769	F770	F771	F772	F773	F774	F775	F776	F777	F778	F779	F780	F781	F782	F783	F784	F785	F786	F787	F788	F789	F790	F791	F792	F793	F794	F795	F796	F797	F798	F799	F800	F801	F802	F803	F804	F805	F806	F807	F808	F809	F810	F811	F812	F813	F814	F815	F816	F817	F818	F819	F820	F821	F822	F823	F824	F825	F826	F827	F828	F829	F830	F831	F832	F833	F834	F835	F836	F837	F838	F839	F840	F841	F842	F843	F844	F845	F846	F847	F848	F849	F850	F851	F852	F853	F854	F855	F856	F857	F858	F859	F860	F861	F862	F863	F864	F865	F866	F867	F868	F869	F870	F871	F872	F873	F874	F875	F876	F877	F878	F879	F880	F881	F882	F883	F884	F885	F886	F887	F888	F889	F890	F891	F892	F893	F894	F895	F896	F897	F898	F899	F900	F901	F902	F903	F904	F905	F906	F907	F908	F909	F910	F911	F912	F913	F914	F915	F916	F917	F918	F919	F920	F921	F922	F923	F924	F925	F926	F927	F928	F929	F930	F931	F932	F933	F934	F935	F936	F937	F938	F939	F940	F941	F942	F943	F944	F945	F946	F947	F948	F949	F950	F951	F952	F953	F954	F955	F956	F957	F958	F959	F960	F961	F962	F963	F964	F965	F966	F967	F968	F969	F970	F971	F972	F973	F974	F975	F976	F977	F978	F979	F980	F981	F982	F983	F984	F985	F986	F987	F988	F989	F990	F991	F992	F993	F994	F995	F996	F997	F998	F999	F1000	F1001	F1002	F1003	F1004	F1005	F1006	F1007	F1008	F1009	F1010	F1011	F1012	F1013	F1014	F1015	F1016	F1017	F1018	F1019	F1020	F1021	F1022	F1023	F1024	F1025	F1026	F1027	F1028	F1029	F1030	F1031	F1032	F1033	F1034	F1035	F1036	F1037	F1038	F1039	F1040	F1041	F1042	F1043	F1044	F1045	F1046	F1047	F1048	F1049	F1050	F1051	F1052	F1053	F1054	F1055	F1056	F1057	F1058	F1059	F1060	F1061	F1062	F1063	F1064	F1065	F1066	F1067	F1068	F1069	F1070	F1071	F1072	F1073	F1074	F1075	F1076	F1077	F1078	F1079	F1080	F1081	F1082	F1083	F1084	F1085	F1086	F1087	F1088	F1089	F1090	F1091	F1092	F1093	F1094	F1095	F1096	F1097	F1098	F1099	F1100	F1101	F1102	F1103	F1104	F1105	F1106	F1107	F1108	F1109	F1110	F1111	F1112	F1113	F1114	F1115	F1116	F1117	F1118	F1119	F1120	F1121	F1122	F1123	F1124	F1125	F1126	F1127	F1128	F1129	F1130	F1131	F1132	F1133	F1134	F1135	F1136	F1137	F1138	F1139	F1140	F1141	F1142	F1143	F1144	F1145	F1146	F1147	F1148	F1149	F1150	F1151	F1152	F1153	F1154	F1155	F1156	F1157	F1158	F1159	F1160	F1161	F1162	F1163	F1164	F1165	F1166	F1167	F1168	F1169	F1170	F1171	F1172	F1173	F1174	F1175	F1176	F1177	F1178	F1179	F1180	F1181	F1182	F1183	F1184	F1185	F1186	F1187	F1188	F1189	F1190	F1191	F1192	F1193	F1194	F1195	F1196	F1197	F1198	F1199	F1200	F1201	F1202	F1203	F1204	F1205	F1206	F1207	F1208	F1209	F1210	F1211	F1212	F1213	F1214	F1215	F1216	F1217	F1218	F1219	F1220	F1221	F1222	F1223	F1224	F1225	F1226	F1227	F1228	F1229	F1230	F1231	F1232	F1233	F1234	F1235	F1236	F1237	F1238	F1239	F1240	F1241	F1242	F1243	F1244	F1245	F1246	F1247	F1248	F1249	F1250	F1251	F1252	F1253	F1254	F1255	F1256	F1257	F1258	F1259	F1260	F1261	F1262	F1263	F1264	F1265	F1266	F1267	F1268	F1269	F1270	F1271	F1272	F1273	F1274	F1275	F1276	F1277	F1278	F1279	F1280	F1281	F1282	F1283	F1284	F1285	F1286	F1287	F1288	F1289	F1290	F1291	F1292	F1293	F1294	F1295	F1296	F1297	F1298	F1299	F1300	F1301	F1302	F1303	F1304	F1305	F1306	F1307	F1308	F1309	F1310	F1311	F1312	F1313	F1314	F1315	F1316	F1317	F1318	F1319	F1320	F1321	F1322	F1323	F1324	F1325	F1326	F1327	F1328	F1329	F1330	F1331	F1332	F1333	F1334	F1335	F1336	F1337	F1338	F1339	F1340	F1341	F1342	F1343	F1344	F1345	F1346	F1347	F1348	F1349	F1350	F1351	F1352	F1353	F1354	F1355	F1356	F1357	F1358	F1359	F1360	F1361	F1362	F1363	F1364	F1365	F1366	F1367	F1368	F1369	F1370	F1371	F1372	F1373	F1374	F1375	F1376	F1377	F1378	F1379	F1380	F1381	F1382	F1383	F1384	F1385	F1386	F1387	F1388	F1389	F1390	F1391	F1392	F1393	F1394	F1395	F1396	F1397	F1398	F1399	F1400	F1401	F1402	F1403	F1404	F1405	F1406	F1407	F1408	F1409	F1410	F1411	F1412	F1413	F1414	F1415	F1416	F1417	F1418	F1419	F1420	F1421	F1422	F1423	F1424	F1425	F1426	F1427	F1428	F1429	F1430	F1431	F1432	F1433	F1434	F1435	F1436	F1437	F1438	F1439	F1440	F1441	F1442	F1443	F1444	F1445	F1446	F1447	F1448	F1449	F1450	F1451	F1452	F1453	F1454	F1455	F1456	F1457	F1458	F1459	F1460	F1461	F1462	F1463	F1464	F1465	F1466	F1467	F1468	F1469	F1470	F1471	F1472	F1473	F1474	F1475	F1476	F1477	F1478	F1479	F1480	F1481	F1482	F1483	F1484	F1485	F1486	F1487	F1488	F1489	F1490	F1491	F1492	F1493	F1494	F1495	F14
----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-----



Cálculo de las derivadas de las funciones de forma en sus coordenadas cartesianas. Sólo se muestra para N1:



Matriz [N] calculada en coordenadas naturales y en coordenadas cartesianas:



Matriz [B]:

F1 Interp.1 F2 Interp.2 F3 Matrices F4 Autor F5 Acciones
 1: (U)=[1] (C)
 2: (U)=[A] (C)
 3: (U)=[A] (C) reordenada
 4: (A)
 5: (U)=[1] (A) (U)=[N] (U)
 6: (A) (U)
 7: (N)=[1] (A) (U)
 8: (B)=[U] (U)
 9: (U)=[N] (U), (U)=[N] (U)
 A: x=[N] (x1), y=[N] (y1)
 B: (C)=[N] (U)=[B] (U)
 C: (C)=[C] (U)=[C] (B) (U)

Matriz [B]

$$[B] = [J]^T \begin{bmatrix} \delta \\ \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n1 & n2 & n3 \end{bmatrix}$$

Matriz [B] calculada en función de C, n

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot \xi - 1 & 2 \cdot \xi + 1 & -4 \cdot \xi \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz [K]:

Matriz [B] calculada en función de x

$$\begin{bmatrix} \frac{4 \cdot x - 3 \cdot 1 - 4 \cdot x1}{1^2} & \frac{4 \cdot x - 1 - 4 \cdot x1}{1^2} & -4 \cdot (2 \cdot x) \end{bmatrix}$$

F1 Interp.1 F2 Interp.2 F3 Matrices F4 Autor F5 Acciones
 1: (N)
 2: (B)
 3: (C)
 4: (K)
 5: (K) (J)
 6: (P) (J)
 7: (P) y (fs)
 8: (P) y (Ps)
 9: (P) y (fu)
 A: (C)=[C] (f)
 B: (C)=[C] (f)
 C: (N)

Matriz de Rigidez [K]

$$[K] = E \cdot \int [B]^T [B] da$$

da = t · dξ, t espesor

$$E \cdot \int_{-1}^1 [B]^T [B] t d\xi$$

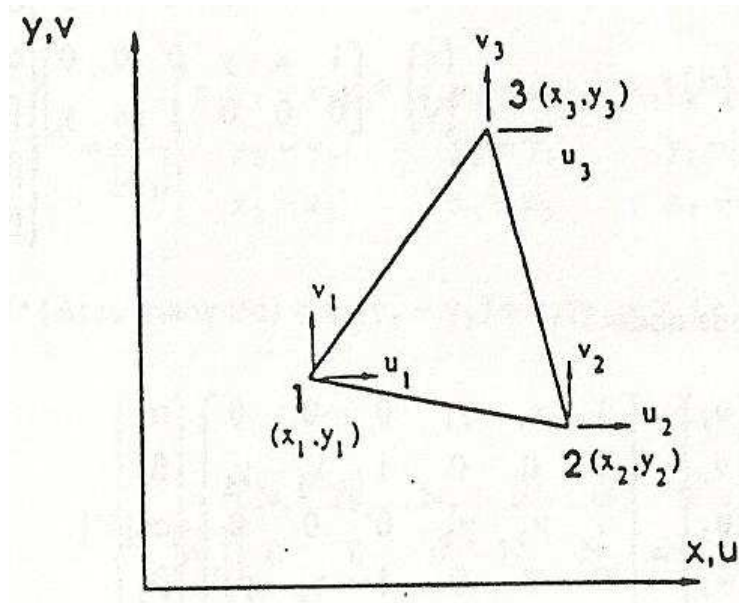
Integral analítica

$$\begin{bmatrix} \frac{14 \cdot e \cdot t}{3 \cdot 1^2} & \frac{2 \cdot e \cdot t}{3 \cdot 1^2} & \frac{-16 \cdot e \cdot t}{3 \cdot 1^2} \\ \frac{2 \cdot e \cdot t}{3 \cdot 1^2} & \frac{14 \cdot e \cdot t}{3 \cdot 1^2} & \frac{-16 \cdot e \cdot t}{3 \cdot 1^2} \\ \frac{-16 \cdot e \cdot t}{3 \cdot 1^2} & \frac{-16 \cdot e \cdot t}{3 \cdot 1^2} & \frac{32 \cdot e \cdot t}{3 \cdot 1^2} \end{bmatrix}$$

2. Triangular.

Ejemplo 2.

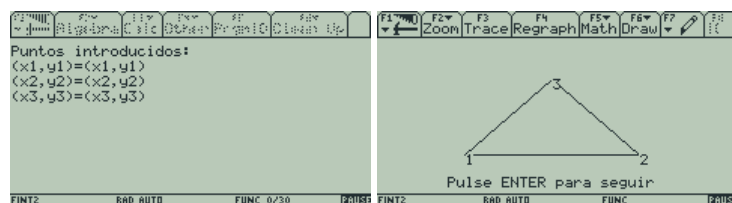
Obtener razonadamente los términos K_{22} y K_{23} de la matriz de rigidez del elemento triangular de material isotrópico y espesor constante t que se indica en la figura en el caso de tensión plana y utilizando interpolación lineal



(Problema nº 8 de "Teoría General del MEF" de la UNED).

Solución con FINTERPO.

Elegimos interpolación MEF triangular y con tensión plana. Tras introducir las coordenadas de los nodos, se dibuja el triángulo genérico. Obsérvese que en la imagen el triángulo es equilátero, pero no tiene porqué. El dibujo refleja los nodos:



Y reordenando las matrices, queda:

F1	F2	F3	F4	F5
Interp.1	Interp.2	Matrices	Autor	Acciones
$ a = x1 \cdot (y2 - y3) - x2 \cdot (y1 - y3) + x3 \cdot (y1 - y2)$ $ a = 2 \cdot \Omega$ $\Omega = \frac{x1 \cdot (y2 - y3) - x2 \cdot (y1 - y3) + x3 \cdot (y1 - y2)}{2}$				

Matriz [N]:

F1	F2	F3	F4	F5
Interp.1	Interp.2	Matrices	Autor	Acciones
$1: \langle u \rangle = \{1\} \langle \alpha \rangle$ $2: \langle U \rangle = \{A\} \langle \alpha \rangle$ $3: \langle U \rangle = \{A\} \langle \alpha \rangle \text{ reordenada}$ $4: \{A\}$ $5: \langle U \rangle = \{1\} \{A\}^4 \langle U \rangle = \{N\} \langle U \rangle$ $6: \{A\}^4$ $7: \{N\} = \{1\} \{A\}^4$ $8: \{B\} = \{D\} \{N\}$ $9: u = \sum (N1, u1), v = \sum (N1, v1)$ $A: x = \sum (N1, x1), y = \sum (N1, y1)$ $B: \langle e \rangle = \{D\} \{N\} \langle U \rangle = \{B\} \langle U \rangle$ $C: \langle e \rangle = \{C\} \{D\} \{N\} \langle U \rangle = \{C\} \{B\} \langle U \rangle$				

Matriz [N]

$$n = \begin{bmatrix} 1 & n1 & n2 & n3 & 0 & 0 & 0 \\ a1 & 0 & 0 & 0 & n1 & n2 & n3 \end{bmatrix}$$

$$|a| = x1 \cdot (y2 - y3) - x2 \cdot (y1 - y3) + x3 \cdot (y1 - y2)$$

Matriz [N] desarrollada

$$n = \begin{bmatrix} (y2 - y3) \cdot x - (x2 - x3) \cdot y + x2 \cdot y3 - x3 \cdot y2 \\ x1 \cdot (y2 - y3) - x2 \cdot (y1 - y3) + x3 \cdot (y1 - y2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz [B]:

F1	F2	F3	F4	F5
Interp.1	Interp.2	Matrices	Autor	Acciones
$1: \langle u \rangle = \{1\} \langle \alpha \rangle$ $2: \langle U \rangle = \{A\} \langle \alpha \rangle$ $3: \langle U \rangle = \{A\} \langle \alpha \rangle \text{ reordenada}$ $4: \{A\}$ $5: \langle U \rangle = \{1\} \{A\}^4 \langle U \rangle = \{N\} \langle U \rangle$ $6: \{A\}^4$ $7: \{N\} = \{1\} \{A\}^4$ $8: \{B\} = \{D\} \{N\}$ $9: u = \sum (N1, u1), v = \sum (N1, v1)$ $A: x = \sum (N1, x1), y = \sum (N1, y1)$ $B: \langle e \rangle = \{D\} \{N\} \langle U \rangle = \{B\} \langle U \rangle$ $C: \langle e \rangle = \{C\} \{D\} \{N\} \langle U \rangle = \{C\} \{B\} \langle U \rangle$				

Matriz [B] = [D] [N]

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n1 & n2 & n3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n1 & n2 & n3 \end{bmatrix}$$

Matriz [B] simbólica

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta n1}{\delta x} & \frac{\delta n2}{\delta x} & \frac{\delta n3}{\delta x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta n1}{\delta y} & \frac{\delta n2}{\delta y} & \frac{\delta n3}{\delta y} \\ \frac{\delta n1}{\delta y} & \frac{\delta n2}{\delta y} & \frac{\delta n3}{\delta y} & \frac{\delta n1}{\delta x} & \frac{\delta n2}{\delta x} & \frac{\delta n3}{\delta x} \end{bmatrix}$$

Matriz [B] para cada K=nº nudos

$$b1k = [j11]^{-1} \cdot \frac{\delta nk}{\delta x} + [j12]^{-1} \cdot \frac{\delta nk}{\delta y}$$

$$b2k = [j21]^{-1} \cdot \frac{\delta nk}{\delta x} + [j22]^{-1} \cdot \frac{\delta nk}{\delta y}$$

$$\begin{bmatrix} b1k & 0 \\ 0 & b2k \\ b2k & b1k \end{bmatrix}$$

siendo Ω :

$$|\mathbf{a}| = 2 \cdot \Omega$$

$$\Omega = \frac{x_1 \cdot (y_2 - y_3) - x_2 \cdot (y_1 - y_3) + x_3 \cdot (y_1 - y_2)}{2}$$

Matriz de rigidez [K]:

A la hora de calcular componentes de la matriz K siempre se debe calcular primero la propia matriz. En este caso y ddo que se trabaja con valores simbólicos el cálculo tarda bastante, pero al final arroja los resultados. Obsérvese que la diferencial dv no es más que el espesor t multiplicado por la diferencial del área y que la integral finalmente es simple:

Matriz de Rigidez [K]

$$[K] = [B]^T * [C] * [B] * \int (t * d\Omega) = [B]^T * [C] * [B] * t * \Omega$$

$$e \cdot \frac{x_2^2 \cdot (\mu - 1) - 2 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (\mu - 1) + x_3^2 \cdot (\mu - 1)}{8 \cdot \Omega \cdot (\mu - 1) \cdot (\mu + 1)}$$

$$- e \cdot \frac{x_1 \cdot (x_2 - x_3) \cdot (\mu - 1) - x_2 \cdot x_3 \cdot (\mu - 1) + x_3^2}{8 \cdot \Omega \cdot (\mu - 1) \cdot (\mu + 1)}$$

$$e \cdot \frac{x_1 \cdot (x_2 - x_3) \cdot (\mu - 1) - x_2^2 \cdot (\mu - 1) + x_2 \cdot x_3}{8 \cdot \Omega \cdot (\mu - 1) \cdot (\mu + 1)}$$

Componente K_{22} :

Elemento [Kij] de rigidez
Fila 2
Columna 2

El elemento es:

$$k_{22} = \frac{e \cdot \left[x_1^2 \cdot (\mu - 1) - 2 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot (\mu - 1) + x_3^2 \cdot (\mu - 1) - 2 \cdot (y_1 - y_3)^2 \right] \cdot t}{8 \cdot \Omega \cdot (\mu - 1) \cdot (\mu + 1)}$$

Componente K_{23} :

El elemento es:
$k_{23} = \frac{-e \cdot (x_1^2 \cdot (\mu - 1) - x_1 \cdot (x_2 + x_3) \cdot (\mu - 1) + x_2 \cdot x_3 \cdot (\mu - 1) - 2 \cdot (y_1 - y_3) \cdot (y_1 - y_2)) \cdot t}{8 \cdot \Omega \cdot (\mu - 1) \cdot (\mu + 1)}$

Nótese que estos valores para las componentes son los mismos que los calculados en el texto salvo que la expresión está escrita de otra forma.

Ejemplo 3.

Calcular la matriz de rigidez y el vector de cargas para el elemento bidimensional con interpolación lineal en tensión plana de la figura, si además de las cargas indicadas está sometido a un incremento de temperatura de 50 °C.

DATOS:

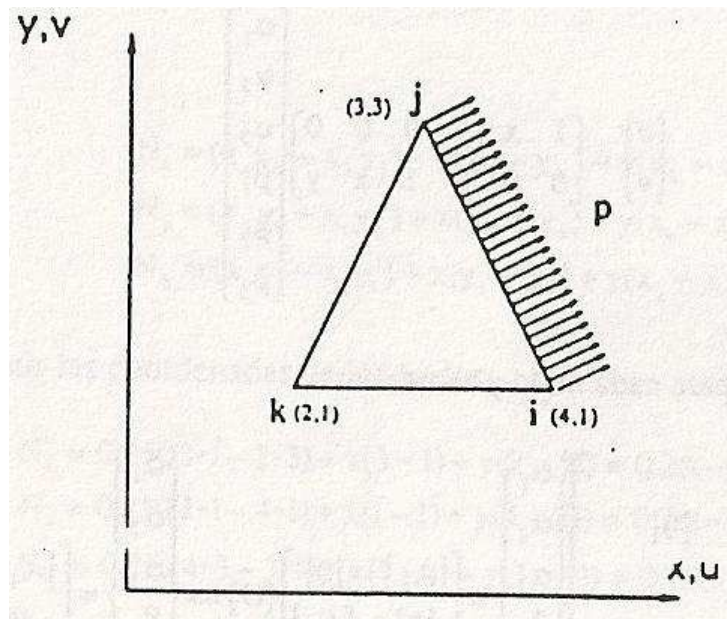
$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\mu = 0,3$$

$$\text{Espesor } t = 0,2 \text{ cm}$$

$$p = 100 \text{ kg/cm}^2$$

$$\alpha = 2 \cdot 10^{-6} \text{ cm / } ^\circ\text{C}$$

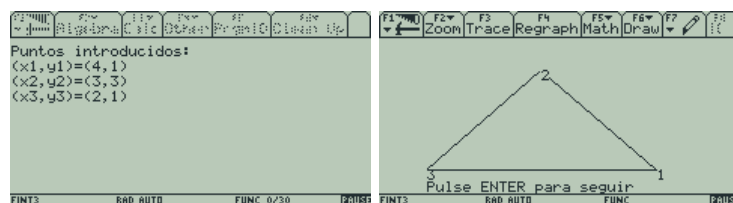


(Problema n° 12 de "Teoría General del MEF" de la UNED).

Solución con FINTERPO.

En este caso las matrices no estarán agrupadas.

Puntos introducidos y dibujo con los nodos:



Introducimos los datos. Ejemplo de cómo se introduce el módulo de elasticidad:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Intro	Datos	Ver	Datos	Calcular			
1: Calculadora	2: Espesor t	3: Cargas de volumen fv	4: Cargas de superficie fs	5: Cargas nodales p	6: Cargas térmicas	7: Densidad ρ	8: Módulo de elasticidad E
9: Coeficiente de Poisson μ	A: Desplazamiento nodal	B: Tensiones iniciales	gomezvega@hotmail.com				
FINT3				RND AUTO			
FUNC 0/30				FINT3			
				RND AUTO			
				FUNC 0/30			

Para introducir la fuerza por unidad de superficie se tiene en cuenta el ángulo que forma la normal de los vectores de carga con la horizontal. Según las dimensiones del triángulo se obtiene que el ángulo que forma el lado horizontal con el que está cargado es de $63,43^\circ$, luego el ángulo buscado es $26,57^\circ$, es decir, $\arctan(0,5)$. También se especifica entre que nudos está la carga:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Intro	Datos	Ver	Datos	Calcular			
Cargas de superficie							
Carga 1							
Poner carga por unidad de superficie							
Valor f?							
100							
Angulo que forma normal con eje x?							
$\tan^{-1}(0,5)$							
La carga está entre 2 nudos, N1°?							
1							
N2°?							
2							
FINT3				RND AUTO			
FUNC 0/30							

El resto de datos ya introducidos:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Intro	Datos	Ver	Datos	Calcular			
2							
1							
Espesor t=1/5							
Cargas de superficie							
fsup = $\begin{bmatrix} 100 \cdot \cos\left(\frac{265651}{10000}\right) \\ 100 \cdot \sin\left(\frac{265651}{10000}\right) \end{bmatrix}$							
Cargas térmicas uniformes							
ΔT=50							
α=1/500000							
Módulo Elasticidad E=2100000							
Coeficiente de Poisson μ=3/10							
FINT3				RND AUTO			
FUNC 0/30				12/04			

Funciones de forma Ni:

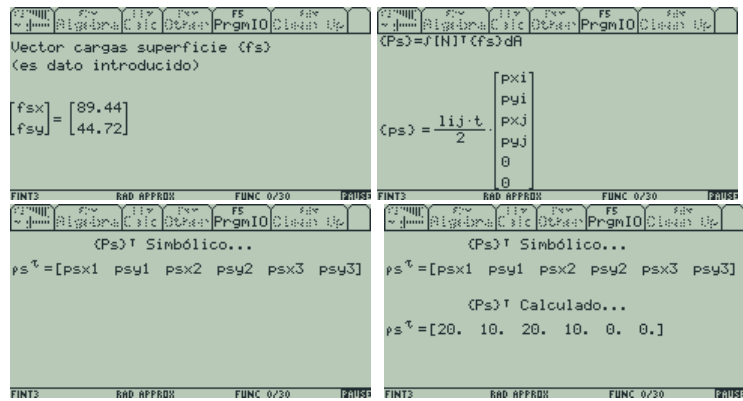
Matriz [N]:

Matriz [B]:

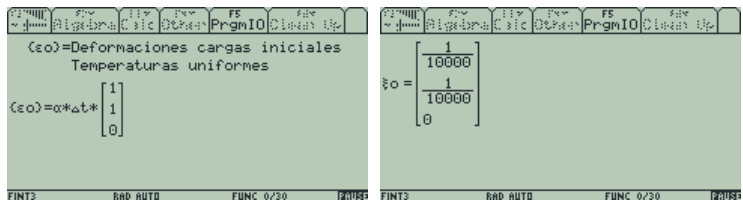
Figure 10.10 shows four sequential calculator screens for solving a system of linear equations using the matrix inverse method on a TI-84 Plus calculator.

- Screen 1:** The user enters the coefficient matrix A as $\begin{bmatrix} \frac{\delta n1}{\delta x} & \frac{\delta n2}{\delta x} & \frac{\delta n3}{\delta x} \\ 0 & \frac{\delta n1}{\delta y} & \frac{\delta n2}{\delta y} & \frac{\delta n3}{\delta y} \end{bmatrix}$.
- Screen 2:** The user enters the constant vector B as $\begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\Omega} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2 \cdot \Omega} & 0 & \frac{1}{\Omega} & 0 & \frac{-1}{2 \cdot \Omega} \end{bmatrix}$.
- Screen 3:** The user calculates the inverse of matrix A , resulting in $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2 \cdot \Omega} & \frac{1}{\Omega} & \frac{1}{\Omega} & 0 & \frac{-1}{2 \cdot \Omega} & \frac{-1}{\Omega} \end{bmatrix}$.
- Screen 4:** The user multiplies the inverse of A by B to find the solution vector X .

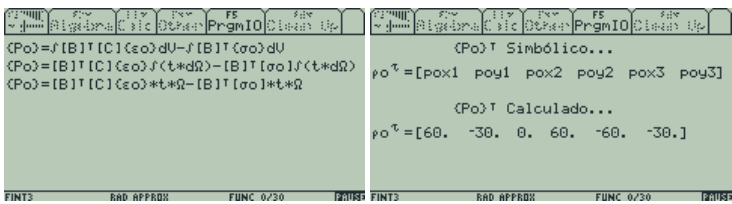
Vector de cargas superficiales $\{\text{Ps}\}$:



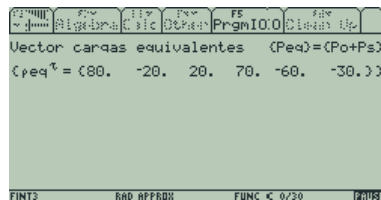
Deformación inicial {Eo}:



Vector de cargas debidas al incremento de temperatura {Po}
(obsérvese que las tensiones iniciales {So} no existen por lo que el 2º miembro de la ecuación es nulo):



Vector de cargas equivalente {Peq}:

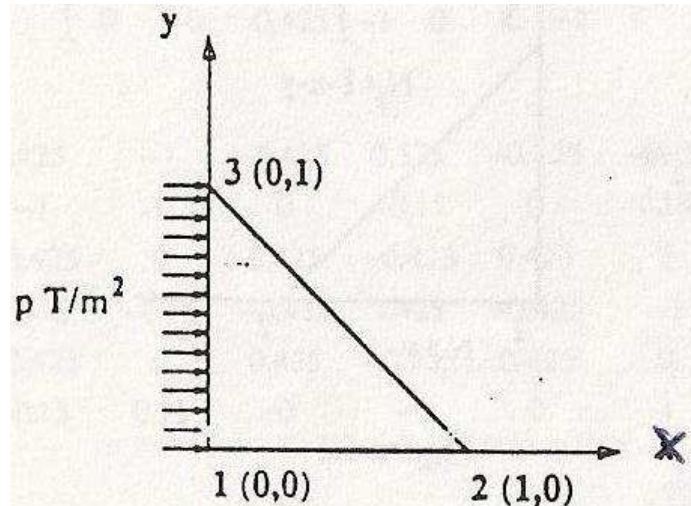


Ejemplo 4.

El triángulo de la figura, con los ejes indicados, es un elemento de una malla de elementos finitos de un continuo sometido a tensión plana. Las cargas que actúan sobre dicho elemento son la de la gravedad (según el eje y negativo) y la indicada en la figura sobre el borde $y=0$. Considerando espesor unidad, obtener la matriz de rigidez del elemento y el vector de cargas.

DATOS: $E = 2,5 \cdot 10^6 \text{ T/m}^2$

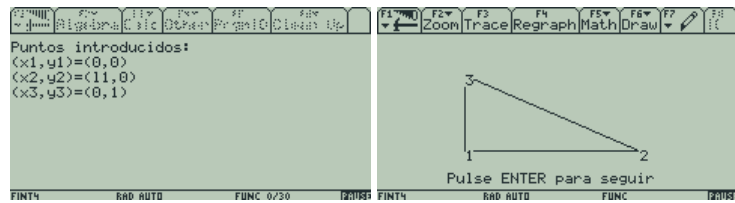
$\mu = 0,15$



(Problema n° 12 de "Teoría General del MEF" de la UNED).

Solución con FINTERPO.

Los puntos introducidos son:



Los datos del problema son los siguientes, donde se han puesto las fuerzas de volumen como -g para la componente vertical:

```

Espesor t=1
Cargas de volumen
fvol = [ 0 ]
      [-g ]
Cargas de superficie
fsup = [ P ]
      [ 0 ]
Módulo Elasticidad E=2500000
Coeficiente de Poisson μ=3/20
  
```

En este caso, los vectores saldrán como agrupados.

Matriz [B]:

```

Matriz [B]=[D][N]
[B] = [ ∂/∂x  0 ] [ n1 n2 n3 0 0 0 ]
      [ 0    ∂/∂y ] [ 0 0 0 n1 n2 n3 ]
      [ ∂/∂y  ∂/∂x ]

[ ∂n1/∂x ∂n2/∂x ∂n3/∂x 0 0 0 ]
[ 0      0      0      ∂n1/∂y ∂n2/∂y ∂n3/∂y ]
[ ∂n1/∂y ∂n2/∂y ∂n3/∂y ∂n1/∂x ∂n2/∂x ∂n3/∂x ]

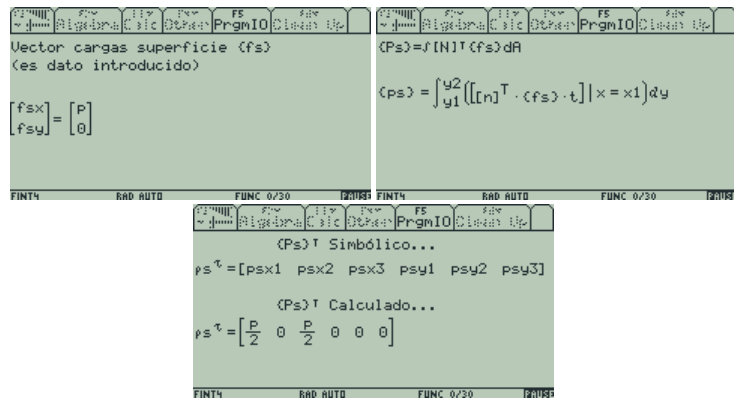
[ -1 1 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 -1 0 1 ]
[ -1 0 1 -1 1 0 ]
  
```

Matriz [C]:

Matriz [K]:

Vector de cargas debido a las fuerzas de gravedad $\{P_v\}$:

Vector de cargas debido a la fuerza superficial $\{P_s\}$:



3. Rectangular.

Ejemplo 5.

Corresponde a un problema numerado 6 de un cuaderno de ejercicios.

Dada la placa de la figura 1, plantear la ecuación matricial $\mathbf{P} = \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}$ para el cálculo de su desplazamientos, así como la tensión en los puntos 3 y baricentro del elemento 1 del modelo (figura 2).

Datos:

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ t/cm}^2$$

$$\nu = 0$$

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

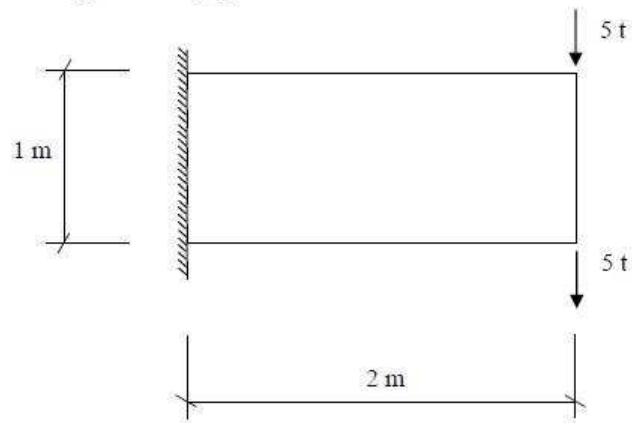


Figura 1

Para ello, se considerará que es un caso de tensión plana y se usará el modelo de la figura 2, formado por dos elementos triangulares con interpolación lineal.

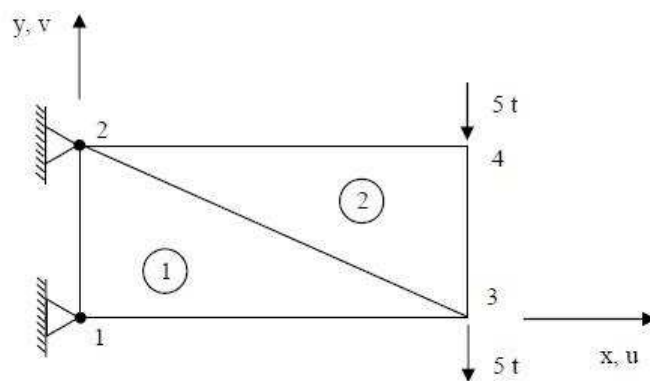


Figura 2

Solución con FINTERPO.

Dada la placa de la figura 1, plantear la ecuación matricial $\mathbf{P} = \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}$ para el cálculo de su desplazamientos, así como la tensión en los puntos 3 y baricentro del elemento 1 del modelo (figura 2).

Datos:

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ t/cm}^2$$

$$\nu = 0$$

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

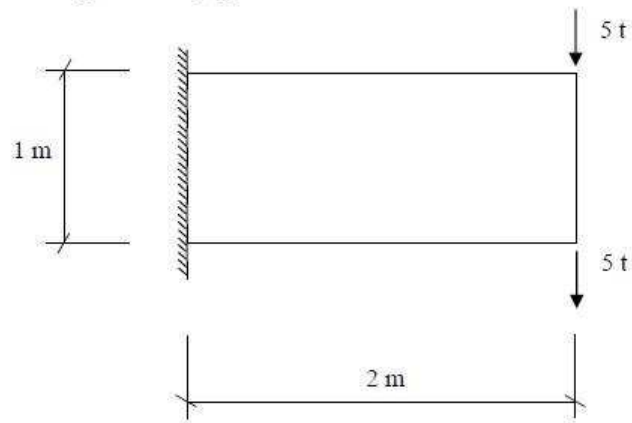


Figura 1

Para ello, se considerará que es un caso de tensión plana y se usará el modelo de la figura 2, formado por dos elementos triangulares con interpolación lineal.

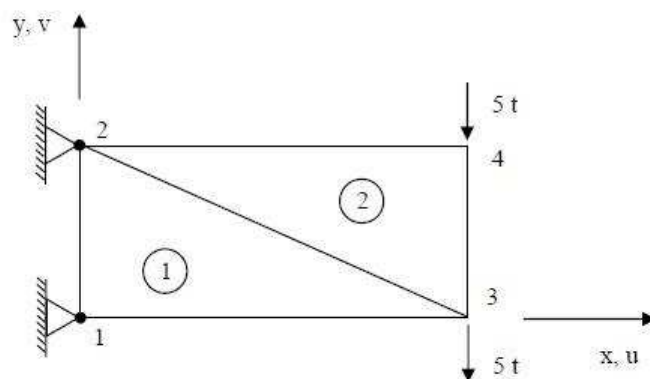


Figura 2

Solución con FINTERPO.

Observando este problema vemos que la rotación de nudos en ambos elementos triangulares debe ser antihoraria. Entonces, hagamos los gráficos de ambos triángulos y su composición como rectángulo.

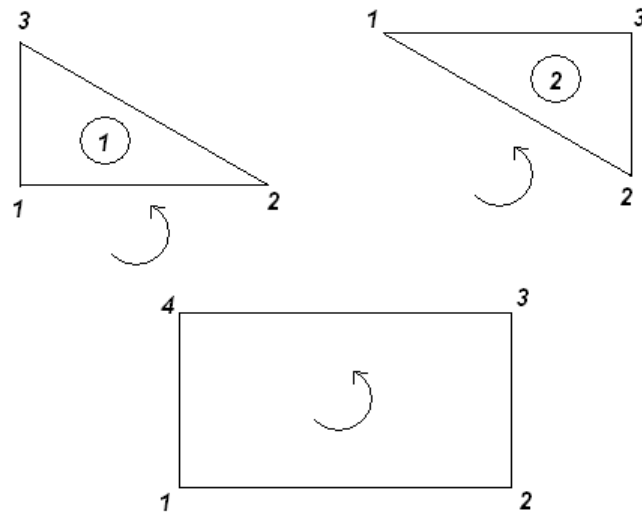


Fig. 5.1. Definición de nudos en elementos

Nodos en triángulo suelto: sentido antihorario {1,2,3}.

Nodos en triángulo inscrito en rectángulo: sentido antihorario: {1,3,2}

Introduciendo los datos y calculando elemento triángulo 1.

Problema Fint#####

Introduzca nombre de Problema

Problema ? : 6

El nº máxino de letras-números es de 4

Descripción: Problema 6 de AF-II

Enter=OK ESC=CANCEL

Zoom Trace Regraph Math Draw

1: Interpolación M.E.F
2: Generador N1 Triángulos
3: N1 Triángular cuadr 6 N
4: N1 Cuadrado 8 nodos (serend.)
5: Func aproxin-Integrac Numerica

FINTERPO 1.1 © 2004-05 José Manuel Gómez Vega ETSII - UNED

Algebra Calc Difer Program Clean Up

1: Monodimensional
2: Triangular
3: Cuadrangular
4: Placa Plana
5: Cuerpo Axilsimétrico

Funciones Interpolación por el M.E.F

Algebra Calc Difer Program Clean Up

Elija Modo presentación:

1: [B],[N],[K] no agrupados
2: [B],[N],[K] agrupados

Algebra Calc Difer Program Clean Up

1: Nodo 1+Abajo Izquierda
2: Nodo 1+Arriba Derecha

Algebra Calc Difer Program Clean Up

1: 4 Nodos
2: 5 Nodos
3: 6 Nodos
4: 8 Nodos
5: 9 Nodos
6: 12 Nodos
7: 2 subelementos triangulares

Elemento Rectangular.
Sentido avance Nodos: Antihorario

Algebra Calc Difer Program Clean Up

1: Subelemento nº 1
2: Subelemento nº 2

Elemento Rectangular con 2 subelementos Triangulares.
Sentido avance Nodos: Antihorario

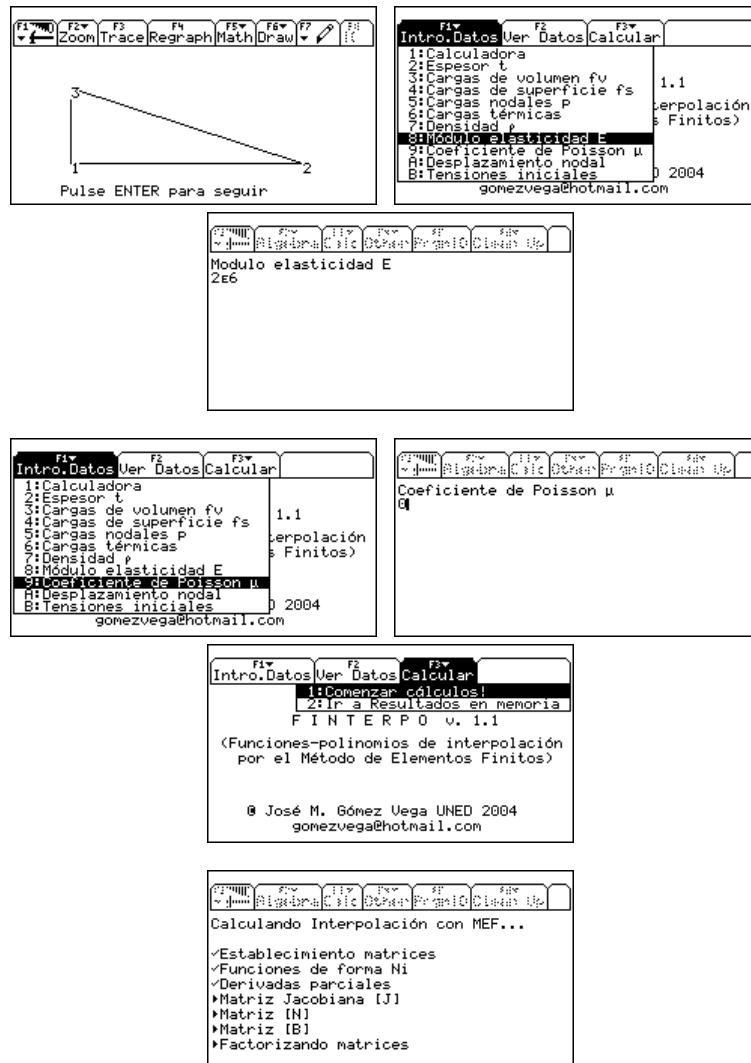
Algebra Calc Difer Program Clean Up

1: Tensión plana
2: Deformación plana

Algebra Calc Difer Program Clean Up

Puntos introducidos:

(x1,y1)=(0,0)
(x2,y2)=(2,0)
(x3,y3)=(0,1)



Cálculo de matriz B^1 .

Para calcular la matriz B^1 , primero calculamos las funciones de forma N_i^1 y sus derivadas que van acopladas en B^1 .

Ahora solo debemos poner los puntos del triángulo 1 y sustituir.

Hallamos las derivadas en función de $\{x,y\}$ para cada N_i ¹.

Ahora podremos calcular la matriz N^1 , aunque con los datos anteriores ya teníamos las funciones de forma aunque no estaban dispuestas matricialmente.

F1	F2	F3	F4	F5
Interp.1	Interp.2	Matrices	Autor	Acciones

1: $\{U\} = \{A\} \{Q\}$
2: $\{U\} = \{A\} \{Q\}$
3: $\{U\} = \{A\} \{Q\}$ reordenada
4: $\{A\}$
5: $\{U\} = \{A\} \{A\}^4 \{U\} = \{N\} \{U\}$
6: $\{A\}^4$
7: $\{N\} = \{A\} \{A\}^4$
8: $\{B\} = \{U\} \{N\}$
9: $u = \sum (N_i, u_i), v = \sum (N_i, v_i)$
10: $A = \sum (N_i, x_i), y = \sum (N_i, y_i)$
11: $\{A\} = \{U\} \{N\} \{U\} = \{B\} \{U\}$
12: $\{A\} = \{C\} \{D\} \{N\} \{U\} = \{C\} \{B\} \{U\}$

<Funcion por e
0 José

[N] Calculada

F1	F2	F3	F4	F5
Interp.1	Interp.2	Matrices	Autor	Acciones

[-x - 2 · y + 2 x 2 · y]

F1	F2	F3	F4	F5
Interp.1	Interp.2	Matrices	Autor	Acciones

Matriz [N]

$$n = \frac{1}{|a|} \begin{bmatrix} n1 & 0 & n2 & 0 & n3 & 0 \\ 0 & n1 & 0 & n2 & 0 & n3 \end{bmatrix}$$

|a| = 2

Funciones de Forma

N1 = $(x2 \cdot y3 - x3 \cdot y2) + x(y2 - y3) + y(x3 - x2)$
N2 = $(x3 \cdot y1 - x1 \cdot y3) + x(y3 - y1) + y(x1 - x3)$
N3 = $(x1 \cdot y2 - x2 \cdot y1) + x(y1 - y2) + y(x2 - x1)$

F1	F2	F3	F4	F5
Interp.1	Interp.2	Matrices	Autor	Acciones

Matriz [N] desarrollada

$$n = \begin{bmatrix} \frac{-(x + 2 \cdot (y - 1))}{2} & \frac{x}{2} & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-(x + 2 \cdot (y - 1))}{2} & \frac{x}{2} & y \end{bmatrix}$$

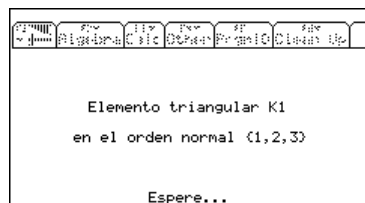
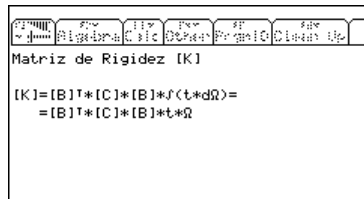
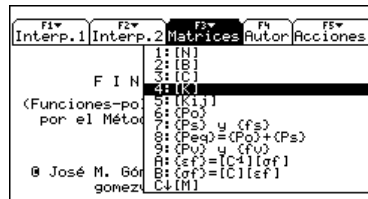
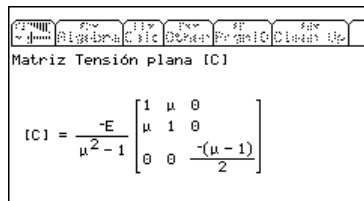
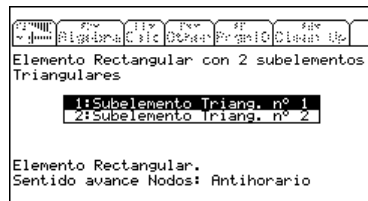
Ahora ya podemos obtener B^1 , observando que nos da la matriz semidespejada primero en función de Ω (área) y luego totalmente resuelta.

$$[B] = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta \eta} \\ \frac{\delta}{\delta \xi} & \frac{\delta}{\delta \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2\cdot\Omega} & 0 & \frac{1}{2\cdot\Omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Omega} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Omega} \\ -\frac{1}{\Omega} & -\frac{1}{2\cdot\Omega} & 0 & \frac{1}{2\cdot\Omega} & \frac{1}{\Omega} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{siendo } R: \\
 & |a_1| = 2 \cdot R \\
 & R = 1 \\
 & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Vamos a calcular la matriz K^1 , que será de acuerdo a la fig. 5.1, para el triángulo 1 con giro antihorario, la siguiente:

$$K^1 = \begin{pmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 \end{pmatrix}$$



Integral analítica					
1500000	500000	-500000	-500000	-1000000	0
500000	2250000	0	-250000	-500000	-2000000
-500000	0	500000	0	0	0
-500000	-250000	0	250000	500000	0
-1000000	-500000	0	500000	1000000	0
0	-2000000	0	0	0	2000000

De acuerdo al elemento triangular integrado en el rectángulo, se tiene en el sentido antihorario {1,3,2}:

$$K'^1 = \begin{pmatrix} k_{11}^1 & k_{13}^1 & k_{12}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 \end{pmatrix}$$

Por ello, deberemos introducir ese orden de nodos en el sentido rotativo, de preferencia antihorario, dado que si no, la matriz saldrá con todos los elementos con signo contrario.

El sentido de nodos del subelemento 1 es

1:Antihorario
2:Horario

Elemento Triangular 1

Introduzca orden de los nodos reales en el elemento triangular

Fijese en la rotación dada
Son válidos solo los números 1,2,3
Orden de nodos: (1,3,2)

Ejemplos: (1,3,2) antih. ó (1,2,3) hor.
Si aparece (2,4,3), sería (1,3,2)

Enter=OK ESC=CANCEL

Finterpo cambiará las filas/columnas pertinentes a la matriz. En esta ocasión, como se ve, se cambian las terceras por las segundas.

File	Edit	View	Format	Tools	Window	Help
Cambio fila\columna 3 por 2						

1	2	3	4	5	6
1500000	500000	-1000000	0	-500000	-500000
500000	2250000	-500000	-2000000	0	-250000
-1000000	-500000	1000000	0	0	500000
0	-2000000	0	2000000	0	0
-500000	0	0	0	500000	0
-500000	-250000	500000	0	0	250000

Para componer la matriz de rigidez hay que poner el nudo que falta al elemento rectangular ampliado 4x4 (matriz 8x8). Por ejemplo, si el elemento es (1,2,3) [nodos normalizados] y (2,4,3) [nodos reales elemento], sería nudo 1 que es el que falta a (2,4,3)

Nodo que falta ?
4

La matriz ampliada K1
orlada de ceros en las filas columnas 4

Espere...

Lo que se ha hecho es orlar de ceros la nueva matriz K^1 del triángulo 1 rellenando las filas y columnas 7 y 8 correspondientes al nudo 4.

1	2	3	4	5	6	7	8
1500000	500000	-1000000	0	-500000	-500000	0	0
500000	2250000	-500000	-2000000	0	-250000	0	0
-1000000	-500000	1000000	0	0	500000	0	0
0	-2000000	0	2000000	0	0	0	0
-500000	0	0	0	500000	0	0	0
-500000	-250000	500000	0	0	250000	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Triángulo 2.

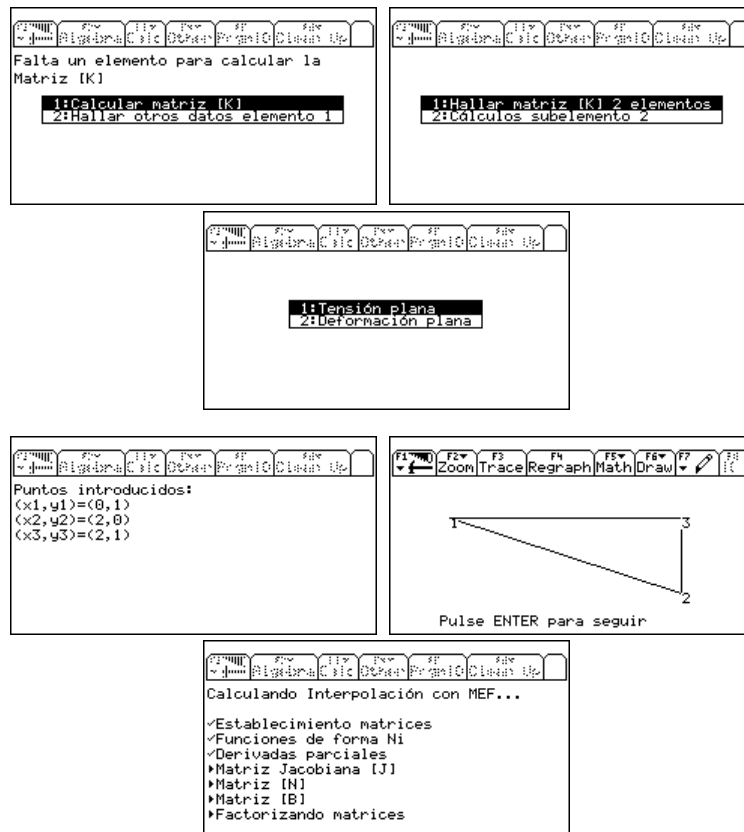
Nodos en triángulo suelto: sentido antihorario {1,2,3}

Nodos en triángulo inscrito en rectángulo: sentido antihorario: {2,3,4}

Se observa que la numeración de nodos en el sentido antihorario es consecutiva.

Introduciendo los datos y calculando elemento triángulo 2.

A continuación el programa nos invita a que calculemos el otro elemento suelto (triángulo 2) para componer la matriz correspondiente al rectángulo.



Cálculo de matriz B^2 .

Se calcula B^2 sin más preámbulos, siguiendo el mismo procedimiento que para B^1 .

F1	F2	F3	F4	F5
Interp.1	Interp.2	Matrices	Autor	Acciones
<div> <div> 1: [N] 2: [B] 3: [C] 4: [K] 5: [Kij] 6: [Po] 7: (Ps) u (fs) 8: (Peq) = (Po) + (Ps) 9: (Pu) u (fv) A: (ef) = [C1][gf] B: (gf) = [C1][ef] C: [M] </div> <div> F I N <Funciones-po por el Méto @ José M. Gó gomez </div> </div>				
<div> <div> -1/2 0 0 0 1/2 0 0 0 0 -1 0 1 0 -1/2 -1 0 1 1/2 </div> <div> </div> </div>				

Cálculo de K^2 .

Vamos a calcular la matriz K^2 , que será de acuerdo a la fig. 6.1, para el triángulo 2 con giro antihorario, la siguiente:

$$K^2 = \begin{pmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{pmatrix}$$

F1	F2	F3	F4	F5
Interp.1	Interp.2	Matrices	Autor	Acciones
<div> <div> 1: [N] 2: [B] 3: [C] 4: [K] 5: [K1j] 6: [Po] 7: (Ps) u (fs) 8: (Peq) = (Po) + (Ps) 9: (Pu) u (fv) A: (ef) = [C1][gf] B: (gf) = [C1][ef] C: [M] </div> <div> F I N <Funciones-po por el Méto @ José M. Gó gomez </div> </div>				
<div> <div> Calculando la Matriz [K]. Espere... Componiendo [K] Calculando [K] </div> <div> </div> </div>				

FLV	FSV	FSV	FN	FSV
Interp.1	Interp.2	Matrices	Auton	Acciones

```

1: x,y,E,n
2: E,n,x,y
3: da
4: E,n/dx
5: N1,i=1,2,3,...
6: [U] y [J]
7: [U]4
8: (e) y (U)
9: e=xx,ey,xy
10: qN1/qx,qN1/dy (simbolicas)
11: qN1/qx,qN1/dn
12: qN1/qx,qN1/dy

```

1
polación
finitos)

NED 2004

Derivadas para N2
En función de (x,y):

$$\frac{\delta n2}{\delta x} = 1$$

$$\frac{\delta n2}{\delta y} = 0$$

FLV	FSV	FSV	FN	FSV
Interp.1	Interp.2	Matrices	Auton	Acciones
Integral analítica				
500000	0	0	0	-500000 0
0	250000	500000	0	-500000 -250000
0	500000	1000000	0	-1000000 -500000
0	0	0	2000000	0 -2000000
-500000	-500000	-1000000	0	1500000 500000
0	-250000	-500000	-2000000	500000 2250000

FLV	FSV	FSV	FN	FSV
Interp.1	Interp.2	Matrices	Auton	Acciones

```

1: (U)=I+(U)
2: (U)=I(A)(U)
3: (U)=I(A)(U) reordenada
4: [A]
5: (U)=I+(A)4(U)=I(N)(U)
6: [A]4
7: [N]=I+(A)4
8: [B]=I(N)
9: u=Z(N1,u1),v=Z(N1,v1)
10: x=Z(N1,x1),y=Z(N1,y1)
11: (e)=I(N1)(U)=(B)(U)
12: (e)=I(N1)(U)=(C)(B)(U)

```

(Funcion
por e

0 José

Matriz (B)=I(N)

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n1 & 0 & n2 & 0 & n3 & 0 \\ 0 & n1 & 0 & n2 & 0 & n3 \end{bmatrix}$$

FLV	FSV	FSV	FN	FSV
Interp.1	Interp.2	Matrices	Auton	Acciones
500000	0	0	0	-500000 0
0	250000	500000	0	-500000 -250000
0	500000	1000000	0	-1000000 -500000
0	0	0	2000000	0 -2000000
-500000	-500000	-1000000	0	1500000 500000
0	-250000	-500000	-2000000	500000 2250000

Para componer la matriz de rigidez hay que poner el nudo que falta al elemento rectangular ampliado 4x4 (matriz 8x8). Por ejemplo, si el elemento es (1,2,3) [nodos normalizados] y (2,4,3) [nodos reales elementol], sería nudo 1 que es el que falta a (2,4,3)

FLV	FSV	FSV	FN	FSV
Interp.1	Interp.2	Matrices	Auton	Acciones

Nodo que falta ?

11

La matriz ampliada es:

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	500000	0	0	0	-500000	0
4	0	0	0	250000	500000	0	-500000	-250000
5	0	0	0	500000	1000000	0	-1000000	-500000
6	0	0	0	0	0	2000000	0	-2000000
7	0	0	-500000	-500000	-1000000	0	1500000	500000
8	0	0	0	-250000	-500000	-2000000	500000	2250000

La matriz K correspondiente al ensamble de las 2 matrices, suma de K¹ y K² 8x8 ampliadas , sería la siguiente (se ha hecho aparte con el orden de nodos en ambas matrices {1,2,3}, para que se vea simplemente cuál sería):

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-1500000	-500000	500000	500000	1000000	0	0	0
2	-500000	-2250000	0	250000	500000	2000000	0	0
3	500000	0	0	0	0	0	-500000	0
4	500000	250000	0	0	0	0	-500000	-250000
5	1000000	500000	0	0	0	0	-1000000	-500000
6	0	2000000	0	0	0	0	0	-2000000
7	0	0	-500000	-500000	-1000000	0	1500000	500000
8	0	0	0	-250000	-500000	-2000000	500000	2250000

De acuerdo a:

$$K^1 = \begin{pmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Entonces resultaría:

$$K = K^1 + K^2 = \begin{pmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{pmatrix} =$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{23}^1 + k_{12}^2 & k_{13}^2 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 + k_{21}^2 & k_{33}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{pmatrix}$$

que correspondería al orden de nudos antihorario {1,2,3,4}. Sin embargo, esto no es así, dado que el verdadero orden del rectángulo original es {1,3,4,2}, por lo que la matriz resultante anterior no es la adecuada, o bien habría que permutarse los elementos de tal forma que finalmente quedase, de acuerdo a los órdenes antihorarios de los triángulos, tal y como se ha realizado por Finterpo, como sigue:

$$K = K^1 + K^2 = \begin{pmatrix} k_{11}^1 & k_{13}^1 & k_{12}^1 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{33}^1 & k_{32}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{23}^1 & k_{22}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{11}^1 & k_{13}^1 & k_{12}^1 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{33}^1 + k_{11}^2 & k_{32}^1 + k_{12}^2 & k_{13}^2 \\ k_{21}^1 & k_{23}^1 + k_{21}^2 & k_{22}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez K de los 2 elementos
triangulares formando el el. rectangular

2. Generador Ni triángulos.

Ejemplo 6.

Para el triángulo cúbico (n=3), en el 4º nodo, hallar las funciones de forma.

Solución con FINTERPO.

<p>FINTERPO 1.1 © 2004-05 José Manuel Gómez Vega ETSII - UNED</p>	<p>Interpolación en triángulos</p> <p>1: Lineal → 3 Nodos (n=1) 2: Cuadrático → 6 Nodos (n=2) 3: Cúbico → 10 Nodos (n=3)</p>
<p>Obtención de funciones Ni mediante Polinomios de Lagrange para elementos triangulares</p> <p>Se toman ξ_1, ξ_2, ξ_3 tales que: $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = n$, $\xi_3 = 1 - \xi - n$ cumpliendo: $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$</p>	<p>Función de forma Ni:</p> <p>$N_i = L_{\alpha, n}(\xi_1) \cdot L_{\beta, n}(\xi_2) \cdot L_{\gamma, n}(\xi_3)$ (n es el orden del triángulo)</p>
<p>La componente $L_{\alpha, n}(\xi_k)$ resulta:</p> $L_{\alpha, n}(\xi_k) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\alpha} \left(\frac{n \cdot \xi_k + 1 - i}{i} \right), & \alpha \geq 1 \\ 1, & \alpha = 0 \end{cases}$	<p>Interpolación en triángulos</p> <p>Nudo?</p> <p>4</p>
<p>[$\alpha = 2$ $\beta = 1$ $\gamma = 0$]</p> <p>En función de ξ, n:</p> $n_4 = \frac{9 \cdot n \cdot \xi \cdot (3 \cdot \xi - 1)}{2}$ $n_4 = n \cdot \left(\frac{27 \cdot \xi^2}{2} - \frac{9 \cdot \xi}{2} \right)$	<p>[$\alpha = 2$ $\beta = 1$ $\gamma = 0$]</p> <p>En función de ξ_1, ξ_2, ξ_3:</p> $n_4 = \frac{9 \cdot \xi_1 \cdot (3 \cdot \xi_1 - 1) \cdot \xi_2}{2}$ $n_4 = \frac{27 \cdot \xi_1^2 \cdot \xi_2}{2} - \frac{9 \cdot \xi_1 \cdot \xi_2}{2}$

3. Ni Triangular cuadr 6 N.

4. Ni Cuadrado 8 nodos (serend).

Elemento serendipítico de 8 nodos
Empieza a numerarse el n° 1 en el vértice superior derecho, rellenando a izquierdas en verticales. Luego en el lado entre 1 y 2 comienza 5 hasta 8

La posición relativa de los nodos medios con respecto a los ejes es la que lo de finie. Por ejemplo:

$$n5 = \frac{-(n+1) \cdot \{2^2 - 1\}}{2}$$

término (1+n) por ser positivo en eje y parabólico en el otro

$$n1 = \frac{(n+1) \cdot (i+1)}{4}$$

correspondiente al elemento de 4 nodos cuadrado, menos

$$\frac{-n5 - n8}{2}$$

N5 y N8 son los nodos adyacentes al vertice del nodo 1 (que es (+,+) en ejes)

Desplazamientos horizontales

u1?:	0
u2?:	0
u3?:	0
u4?:	0
u5?:	0
u6?:	1
u7?:	1
u8?:	2

Enter=OK ESC=CANCEL

Desplazamientos verticales

v1?:	
v2?:	
v3?:	
v4?:	
v5?:	4
v6?:	
v7?:	
v8?:	

Enter=OK ESC=CANCEL

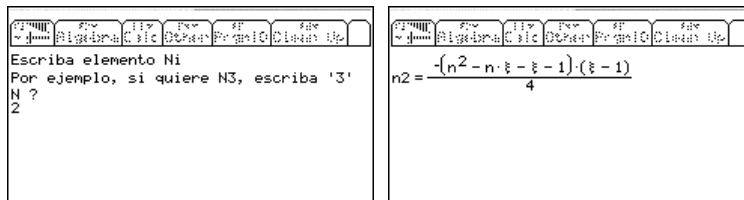
Serendipitico 8 nodos F2
 Volver Menu

```

1:u=Z(N1,u1)
2:v=Z(N1,u1)
3:du/dx=du/dx
4:du/dy=du/dy
5:du/dy=du/dy
6:du/dx=du/dx
7:N1?
8:(e)
  
```

```

1: u = (N1, u1)
2: 2: 6u / 6u = 6u / 6
3: 4: 6u / 6u = 6u / 6
4: 5: 6u / 6u = 6u / 6
5: 6: 6u / 6u = 6u / 6
6: 7: 6u / 6u = 6u / 6
7: 8: 6u / 6u = 6u / 6
8: 9: 6u / 6u = 6u / 6
9: 10: 6u / 6u = 6u / 6
10: 11: 6u / 6u = 6u / 6
11: 12: 6u / 6u = 6u / 6
12: 13: 6u / 6u = 6u / 6
13: 14: 6u / 6u = 6u / 6
14: 15: 6u / 6u = 6u / 6
15: 16: 6u / 6u = 6u / 6
16: 17: 6u / 6u = 6u / 6
17: 18: 6u / 6u = 6u / 6
18: 19: 6u / 6u = 6u / 6
19: 20: 6u / 6u = 6u / 6
20: 21: 6u / 6u = 6u / 6
21: 22: 6u / 6u = 6u / 6
22: 23: 6u / 6u = 6u / 6
23: 24: 6u / 6u = 6u / 6
24: 25: 6u / 6u = 6u / 6
25: 26: 6u / 6u = 6u / 6
26: 27: 6u / 6u = 6u / 6
27: 28: 6u / 6u = 6u / 6
28: 29: 6u / 6u = 6u / 6
29: 30: 6u / 6u = 6u / 6
30: 31: 6u / 6u = 6u / 6
31: 32: 6u / 6u = 6u / 6
32: 33: 6u / 6u = 6u / 6
33: 34: 6u / 6u = 6u / 6
34: 35: 6u / 6u = 6u / 6
35: 36: 6u / 6u = 6u / 6
36: 37: 6u / 6u = 6u / 6
37: 38: 6u / 6u = 6u / 6
38: 39: 6u / 6u = 6u / 6
39: 40: 6u / 6u = 6u / 6
40: 41: 6u / 6u = 6u / 6
41: 42: 6u / 6u = 6u / 6
42: 43: 6u / 6u = 6u / 6
43: 44: 6u / 6u = 6u / 6
44: 45: 6u / 6u = 6u / 6
45: 46: 6u / 6u = 6u / 6
46: 47: 6u / 6u = 6u / 6
47: 48: 6u / 6u = 6u / 6
48: 49: 6u / 6u = 6u / 6
49: 50: 6u / 6u = 6u / 6
50: 51: 6u / 6u = 6u / 6
51: 52: 6u / 6u = 6u / 6
52: 53: 6u / 6u = 6u / 6
53: 54: 6u / 6u = 6u / 6
54: 55: 6u / 6u = 6u / 6
55: 56: 6u / 6u = 6u / 6
56: 57: 6u / 6u = 6u / 6
57: 58: 6u / 6u = 6u / 6
58: 59: 6u / 6u = 6u / 6
59: 60: 6u / 6u = 6u / 6
60: 61: 6u / 6u = 6u / 6
61: 62: 6u / 6u = 6u / 6
62: 63: 6u / 6u = 6u / 6
63: 64: 6u / 6u = 6u / 6
64: 65: 6u / 6u = 6u / 6
65: 66: 6u / 6u = 6u / 6
66: 67: 6u / 6u = 6u / 6
67: 68: 6u / 6u = 6u / 6
68: 69: 6u / 6u = 6u / 6
69: 70: 6u / 6u = 6u / 6
70: 71: 6u / 6u = 6u / 6
71: 72: 6u / 6u = 6u / 6
72: 73: 6u / 6u = 6u / 6
73: 74: 6u / 6u = 6u / 6
74: 75: 6u / 6u = 6u / 6
75: 76: 6u / 6u = 6u / 6
76: 77: 6u / 6u = 6u / 6
77: 78: 6u / 6u = 6u / 6
78: 79: 6u / 6u = 6u / 6
79: 80: 6u / 6u = 6u / 6
80: 81: 6u / 6u = 6u / 6
81: 82: 6u / 6u = 6u / 6
82: 83: 6u / 6u = 6u / 6
83: 84: 6u / 6u = 6u / 6
84: 85: 6u / 6u = 6u / 6
85: 86: 6u / 6u = 6u / 6
86: 87: 6u / 6u = 6u / 6
87: 88: 6u / 6u = 6u / 6
88: 89: 6u / 6u = 6u / 6
89: 90: 6u / 6u = 6u / 6
90: 91: 6u / 6u = 6u / 6
91: 92: 6u / 6u = 6u / 6
92: 93: 6u / 6u = 6u / 6
93: 94: 6u / 6u = 6u / 6
94: 95: 6u / 6u = 6u / 6
95: 96: 6u / 6u = 6u / 6
96: 97: 6u / 6u = 6u / 6
97: 98: 6u / 6u = 6u / 6
98: 99: 6u / 6u = 6u / 6
99: 100: 6u / 6u = 6u / 6
100: 101: 6u / 6u = 6u / 6
101: 102: 6u / 6u = 6u / 6
102: 103: 6u / 6u = 6u / 6
103: 104: 6u / 6u = 6u / 6
104: 105: 6u / 6u = 6u / 6
105: 106: 6u / 6u = 6u / 6
106: 107: 6u / 6u = 6u / 6
107: 108: 6u / 6u = 6u / 6
108: 109: 6u / 6u = 6u / 6
109: 110: 6u / 6u = 6u / 6
110: 111: 6u / 6u = 6u / 6
111: 112: 6u / 6u = 6u / 6
112: 113: 6u / 6u = 6u / 6
113: 114: 6u / 6u = 6u / 6
114: 115: 6u / 6u = 6u / 6
115: 116: 6u / 6u = 6u / 6
116: 117: 6u / 6u = 6u / 6
117: 118: 6u / 6u = 6u / 6
118: 119: 6u / 6u = 6u / 6
119: 120: 6u / 6u = 6u / 6
120: 121: 6u / 6u = 6u / 6
121: 122: 6u / 6u = 6u / 6
122: 123: 6u / 6u = 6u / 6
123: 124: 6u / 6u = 6u / 6
124: 125: 6u / 6u = 6u / 6
125: 126: 6u / 6u = 6u / 6
126: 127: 6u / 6u = 6u / 6
127: 128: 6u / 6u = 6u / 6
128: 129: 6u / 6u = 6u / 6
129: 130: 6u / 6u = 6u / 6
130: 131: 6u / 6u = 6u / 6
131: 132: 6u / 6u = 6u / 6
132: 133: 6u / 6u = 6u / 6
133: 134: 6u / 6u = 6u / 6
134: 135: 6u / 6u = 6u / 6
135: 136: 6u / 6u = 6u / 6
136: 137: 6u / 6u = 6u / 6
137: 138: 6u / 6u = 6u / 6
138: 139: 6u / 6u = 6u / 6
139: 140: 6u / 6u = 6u / 6
140: 141: 6u / 6u = 6u / 6
141: 142: 6u / 6u = 6u / 6
142: 143: 6u / 6u = 6u / 6
143: 144: 6u / 6u = 6u / 6
144: 145: 6u / 6u = 6u / 6
145: 146: 6u / 6u = 6u / 6
146: 147: 6u / 6u = 6u / 6
147: 148: 6u / 6u = 6u / 6
148: 149: 6u / 6u = 6u / 6
149: 150: 6u / 6u = 6u / 6
150: 151: 6u / 6u = 6u / 6
151: 152: 6u / 6u = 6u / 6
152: 153: 6u / 6u = 6u / 6
153: 154: 6u / 6u = 6u / 6
154: 155: 6u / 6u = 6u / 6
155: 156: 6u / 6u = 6u / 6
156: 157: 6u / 6u = 6u / 6
157: 158: 6u / 6u = 6u / 6
158: 159: 6u / 6u = 6u / 6
159: 160: 6u / 6u = 6u / 6
160: 161: 6u / 6u = 6u / 6
161: 162: 6u / 6u = 6u / 6
162: 163: 6u / 6u = 6u / 6
163: 164: 6u / 6u = 6u / 6
164: 165: 6u / 6u = 6u / 6
165: 166: 6u / 6u = 6u / 6
166: 167: 6u / 6u = 6u / 6
167: 168: 6u / 6u = 6u / 6
168: 169: 6u / 6u = 6u / 6
169: 170: 6u / 6u = 6u / 6
170: 171: 6u / 6u = 6u / 6
171: 172: 6u / 6u = 6u / 6
172: 173: 6u / 6u = 6u / 6
173: 174: 6u / 6u = 6u / 6
174: 175: 6u / 6u = 6u / 6
175: 176: 6u / 6u = 6u / 6
176: 177: 6u / 6u = 6u / 6
177: 178: 6u / 6u = 6u / 6
178: 179: 6u / 6u = 6u / 6
179: 180: 6u / 6u = 6u / 6
180: 181: 6u / 6u = 6
```



5. Func aproxim- Integrac Numérica.



Sirve para problemas en memoria, resolviendo la integración numérica de los problemas.

[Anterior](#)

9.-Detección de errores.

[Siguiente](#)

Finterpo, como se ha visto, es un programa complejo. En su escritura se han invertido muchas horas. A pesar de las múltiples pruebas realizadas es probable que existan errores. Es por ello que si encuentra alguno de ellos póngase en contacto con el autor mediante el correo electrónico indicando donde se produjo, cómo, etc., para solucionarlo. Agradezco enormemente la comunicación de errores, si los hubiere. Intentaré resolverlos si tengo tiempo.

[Anterior](#)

10.-Versiones previas.

[Siguiente](#)

Fitnerpo 1.1 es la 1ª versión pública y no existen historiales anteriores.

[Anterior](#)

11.-Advertencias (internal error y

[Siguiente](#)

	variables simbólicas).	
--	-------------------------------	--

-INTRODUCCIÓN VARIABLES SIMBÓLICAS.

Pueden introducirse en un principio cualquier variable en lugar de valores numéricos.

-INTERNAL ERROR.

- 1) Archive todas las variables y programas de la calculadora. Lo que no esté archivado se borrará de la memoria, tanto si es de Anesmef como si no. Tome una precaución especial ante esto antes de seguir.
- 2) Haga un reset, mediante la pulsación consecutiva de las teclas 2nd + Hand (mano) + ON.
(Realmente 2nd + Hand = LOCK).
- 3) Los programas se ejecutarán y además con rapidez, pero estarán protegidos contra lectura y escritura.

Si usa el emulador Vti v.25 Beta tiene dos formas:

- 1) Puede cargar directamente el programa en el emulador mediante el estado Anesmef.sav grabado por mí. Incluye todos los programas de Anesmef preparados para ejecutarse. Esto es muy fácil y rápido: encienda la calculadora virtual, pulse el botón derecho del ratón y aparecerá un menú, seleccione Load state image... Se abrirá un menú de búsqueda del archivo Anesmef.sav, selecciónelo y ya tiene Anesmef en el emulador preparado para calcular, pues solo tendrá que pulsar ENTER para empezar.
- 2) La forma tradicional. Se hace exactamente lo mismo que lo dicho anteriormente para la calculadora real. La localización de las teclas en el PC, serán:

2ND = TECLA ALT

HAND (MANO) = BLOQ MAYÚS

(No deje de pulsar estas teclas)

ON = Pulse con el ratón en la calculadora virtual la tecla ON (extremo inferior izquierdo).

Todas las rutinas y programas de Finterpo son propiedad intelectual del autor, José Manuel Gómez Vega, ingeniero industrial en mecánica de máquinas. El tiempo invertido total a rachas desde abril del 2.003 hasta septiembre del 2.004 ha sido de 17 meses. El manual se finalizó en julio de 2.009. En este tiempo también he gestado otros programas, muchos de ellos sin publicar debido a la escasez de tiempo sobre todo a la hora de realizar los manuales.

Agradezco a las personas interesadas en el Cálculo de Estructuras sus impresiones del programa y un breve comentario sobre:

- 1) facilidad de uso.
- 2) aspectos no incluidos que podrían introducirse.
- 3) fiabilidad de resultados.
- 4) errores detectados.
- 5) forma de programación.
- 6) presentación de resultados paso a paso.

etc...

No duden de enviar sus sugerencias, serán tomadas en cuenta quizá para mejorar el programa, incluso. Escriban a:

Ingenieroindustrialmecanico@gmail.com

gomezvega@hotmail.com

El conjunto de programas **Finterpo** es © 2.010 José Manuel Gómez Vega. Está permitido el uso, manejo, transformación del programa **Finterpo** para usos particulares. No está permitida la distribución de **Finterpo** en otros medios que los empleados por el propio autor del programa sin avisar previamente al mismo para dar el visto bueno, si es que se permite tras la consulta. Las comunicaciones para estos fines se realizarán por correo electrónico. Cualquier transformación, modificación o mejora de dicho

programa para usos particulares está permitida, salvo la distribución. Está prohibida la distribución para usos comerciales del programa ***Finterpo*** en cualquier forma o medio incluidos aquellos en los que se regale el programa por la compra de calculadoras, habiéndose preinstalado, donado o entregado por empresas de distribución y venta de calculadoras, asimismo como por particulares.