

PROBLEMAS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS RESUELTOS CON EL PROGRAMA



PROBLEMA N° 1.

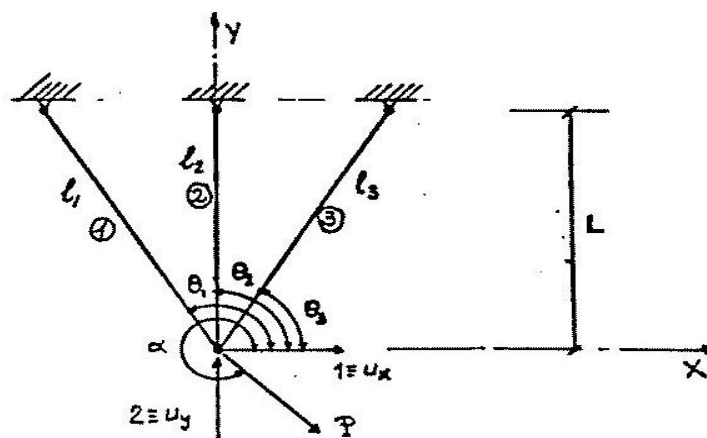
Ejemplo de la página 49 de los apuntes "Notas de teoría de estructuras", del 1er parcial de Análisis de Estructuras. Métodos Numéricos, 4º curso de la ETS Ingenieros Industriales de la UNED.

En la estructura de la figura se pide calcular los desplazamientos.

Los datos son:

Ángulos: $q_1 = 120^\circ$, $q_2 = 90^\circ$, $q_3 = 60^\circ$, $\alpha = 315^\circ$. Secciones: $a_1 = a_2 = a_3 = a$.

Carga: $P = 1$ (N). Longitudes: $l_2 = 1$, $l_1 = l_3$.



Solución con Anesmef.

Este problema presenta una mezcla de datos simbólicos y numéricos. Empezamos definiendo las coordenadas de los nudos. Anesmef calcula perfectamente problemas con datos simbólicos. No obstante, el valor simbólico debe ser puro para denominarlo como las variables genéricas E, A, L, etc. Este problema presenta la particularidad de que por ejemplo $l_1 = \frac{l_2}{\cos(30)} = \frac{2\sqrt{3} \cdot L}{3}$, (no es seno sino coseno), pero L es una variable

genérica, por lo que no la podremos usar debido a lo mencionado y habrá que hacer un cambio de variable. Tomaremos L_0 en lugar de L.

Este problema se desarrolló mediante los métodos clásicos. Aquí se resolverá por el método matricial de Anesmef.

Para el desarrollo de la introducción de datos, léase el manual de Anesmef. Antes que nada se calculan manualmente los nudos y se descompone la carga en el nudo 4 según los ejes. Los datos introducidos al respecto son:

NUMERO	COORD X	COORD Y	CARGA X	CARGA Y	CARGA θ
1	0	10	0	0	0
2	$\frac{10\sqrt{3}}{3}$	10	0	0	0
3	$\frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{3}$	10	0	0	0
4	$\frac{10\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

La matriz de rigidez simbólica (en desplazamientos) es fácil de determinar a mano pues únicamente hay desplazamientos en el nudo 4 y según las conexiones entre elementos se llega a:

NUMERO	COORD X	COORD Y	CARGA X	CARGA Y	CARGA θ
Matriz de Rigidez [K]					
"Nudos" 4					
4	$k22[3] + k22[2] + k22[1]$				

donde se recuerda que dicha matriz simbólica la calcula también el programa.

Las submatrices globales calculadas necesarias para la matriz de rigidez son:

NUMERO	COORD X	COORD Y	CARGA X	CARGA Y	CARGA θ
Submatriz global [K22](1) calculada					
$\begin{bmatrix} \frac{a \cdot e \cdot \sqrt{3}}{8 \cdot l_0} & -\frac{3 \cdot a \cdot e}{8 \cdot l_0} \\ -\frac{3 \cdot a \cdot e}{8 \cdot l_0} & \frac{3 \cdot a \cdot e \cdot \sqrt{3}}{8 \cdot l_0} \end{bmatrix}$					
Submatriz global [K22](2) calculada					
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{a \cdot e}{l_0} \end{bmatrix}$					

Submatriz global [K22](3) calculada

$$\begin{bmatrix} \frac{a \cdot e \cdot \sqrt{3}}{8 \cdot l_0} & \frac{3 \cdot a \cdot e}{8 \cdot l_0} \\ \frac{3 \cdot a \cdot e}{8 \cdot l_0} & \frac{3 \cdot a \cdot e \cdot \sqrt{3}}{8 \cdot l_0} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez (que en este caso ya está triangularizada) es:

Matriz [K] :

$$\begin{bmatrix} \frac{a \cdot e \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot l_0} & 0 \\ 0 & a \cdot e \cdot \left(\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} + 1 \right) \end{bmatrix}$$

El vector de cargas es:

Vector {F} de acople en ec. {F}=[K]{u}

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Finalmente, los desplazamientos aplicando la ecuación, son:

DESPLAZAMIENTOS NODALES

	nudo1	nudo2	nudo3	nudo4
u	0	0	0	$\frac{2 \cdot l_0 \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot a \cdot e}$
v	0	0	0	$\frac{-2 \cdot l_0 \cdot (3 \cdot \sqrt{3} - 4) \cdot \sqrt{2}}{11 \cdot a \cdot e}$
θ	0	0	0	0

DESPLAZAMIENTOS NODALES

	nudo1	nudo2	nudo3	nudo4
u	0	0	0	$\frac{2 \cdot l_0 \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot a \cdot e}$
v	0	0	0	$\frac{-2 \cdot l_0 \cdot (3 \cdot \sqrt{3} - 4) \cdot \sqrt{2}}{11 \cdot a \cdot e}$
θ	0	0	0	0

que se han hallado mediante la matriz de desplazamientos. Podemos obtener el resultado en el nudo deseado (4º), sabiendo que son resultados globales (así serán si no son nudos con apoyo inclinado).

Los desplazamientos se obtienen de:
 $[P] = [K][d] \rightarrow [d] = [K]^{-1}[P]$

Numero de Nudo?
 4

NUDO 4 globales

Eje X, $u = \frac{2 \cdot l_0 \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot a \cdot e}$

Eje Y, $v = \frac{-2 \cdot l_0 \cdot (3 \cdot \sqrt{3} - 4) \cdot \sqrt{2}}{11 \cdot a \cdot e}$

Giro θ, θ = 0

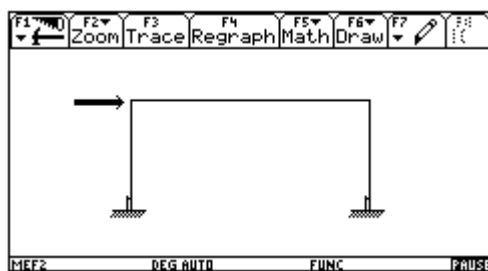
$$\underline{u} = \frac{L}{aE} \begin{Bmatrix} \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{4+3\sqrt{3}} \end{Bmatrix}$$

El resultado para v_4 no da diferente según el problema de las hojas, sino que la calculadora ofrece el resultado sin el radical en el denominador multiplicando por el conjugado de dicha expresión, como se puede comprobar fácilmente haciendo dicha operación.

PROBLEMA N° 2.

Ejercicio nº 2 de la 1ª parte del libro "Teoría General del MEF", de Juan José Benito y Ramón Álvarez, ETSII- UNED, página I.22.

Obtener los desplazamientos en los puntos A y B de la estructura de la figura.



Área de las barras: $A = 900 \text{ cm}^2$; inercia de las barras: $I = 800.000 \text{ cm}^4$; módulo de elasticidad del material: $E = 200.000 \text{ kg / cm}^2$; carga aplicada: $F = 10.000 \text{ Kg}$; longitud AB = 3 m ; altura base apoyos a dintel : 2 m.

Solución con Anesmef.

Renombremos los nudos, de izquierda a derecha y de abajo a arriba, como 1,2,3,4, por lo que el nudo A será el 2 mientras que el B el 3. Los 3 elementos serán en el mismo orden antedicho, con conexiones entre nudos: 1 > 2, 2 > 3, 3 > 4.

Ejemplo de presentación de Matrices para la barra 1.

Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up
Matriz cambio [L](1) calculada				
0	-1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	-1
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1
MEF2 DEG AUTO FUNC 0/30 PAUSE				

Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up
Matriz local [k](1) calculada				
9.e5	0.e0	0.e0	-9.e5	0.e0
0.e0	2.4e5	2.4e7	0.e0	-2.4e5
0.e0	2.4e7	3.2e9	0.e0	-2.4e7
-9.e5	0.e0	0.e0	9.e5	0.e0
0.e0	-2.4e5	-2.4e7	0.e0	2.4e5
0.e0	2.4e7	1.6e9	0.e0	-2.4e7
MEF2 DEG APPROX FUNC 0/30 PAUSE				

Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up
Matriz cambio [L](1) calculada				
0	1	0	0	0
-1	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	-1	0
0	0	0	0	1
MEF2 DEG AUTO FUNC 0/30 PAUSE				

Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up
Matriz global [K](1) calculada				
2.4e5	0.e0	-2.4e7	-2.4e5	0.e0
0.e0	9.e5	0.e0	0.e0	-9.e5
-2.4e7	0.e0	3.2e9	2.4e7	0.e0
-2.4e5	0.e0	2.4e7	2.4e5	0.e0
0.e0	-9.e5	0.e0	0.e0	9.e5
-2.4e7	0.e0	1.6e9	2.4e7	0.e0
MEF2 DEG APPROX FUNC 0/30 PAUSE				

Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up
Elemento 1				
Longitud 200				
Angulo sobre eje x (+) 90 °				
MEF2 DEG AUTO FUNC 0/30 PAUSE				

Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up
$\begin{bmatrix} \frac{a \cdot e}{1} & 0 & 0 & \frac{-a \cdot e}{1} & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot e \cdot i}{1^3} & \frac{6 \cdot e \cdot i}{1^2} & 0 & \frac{-12 \cdot e \cdot i}{1^3} \\ 0 & \frac{6 \cdot e \cdot i}{1^2} & \frac{4 \cdot e \cdot i}{1} & 0 & \frac{-6 \cdot e \cdot i}{1^2} \\ \frac{-a \cdot e}{1} & 0 & 0 & \frac{a \cdot e}{1} & 0 \end{bmatrix}$				
MEF2 DEG AUTO FUNC 0/30 PAUSE				

Se omiten las presentaciones para los elementos restantes. Busquemos la matriz de rigidez simbólica y la calculada.

Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up
Matriz de Rigidez [K]				
"Nudos" 2 3				
2	$k_{11}[2] + k_{22}[1]$		$k_{21}[2]$	
3	$k_{12}[2]$		$k_{11}[3] + k_{22}[2]$	
MEF2 DEG AUTO FUNC 0/30 PAUSE				

Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up
Matriz [K] :				
8.40e5	0.00e0	2.40e7	-6.00e5	0.00e0
0.00e0	9.71e5	1.07e7	0.00e0	-7.1
2.40e7	1.07e7	5.33e9	0.00e0	-1.6
-6.00e5	0.00e0	0.00e0	8.40e5	0.00e0
0.00e0	-7.11e4	-1.07e7	0.00e0	9.71
0.00e0	1.07e7	1.07e9	2.40e7	-1.6
MEF2 DEG APPROX FUNC 21/30 PAUSE				

Como aclaración complementaria, puede servir la matriz de los elementos que integran dicha matriz de rigidez.

Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up
La matriz [K] de Rigidez simbólica es:				
$\begin{bmatrix} k_{1[4,4]} + k_{2[1,1]} & k_{1[4,5]} + k_{2[1,2]} & k_{1[4,6]} + k_{2[1,3]} \\ k_{1[5,4]} + k_{2[2,1]} & k_{1[5,5]} + k_{2[2,2]} & k_{1[5,6]} + k_{2[2,3]} \\ k_{1[6,4]} + k_{2[3,1]} & k_{1[6,5]} + k_{2[3,2]} & k_{1[6,6]} + k_{2[3,3]} \end{bmatrix}$				
MEF2 DEG APPROX FUNC 21/30 PAUSE				

Desarrollo paso a paso de los desplazamientos partiendo de la matriz de rigidez y del vector de cargas. La 1ª pantalla es la matriz de rigidez ampliada con el vector de cargas. Se triangulariza inferiormente dicha matriz y se resuelven las ecuaciones. Se han intercalado varias pantallas.

Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up
10E7	-6.00E5	0.00E0	0.00E0	1.00E4
37E7	0.00E0	-7.11E4	1.07E7	0.00E0
33E9	0.00E0	-1.07E7	1.07E9	0.00E0
30E0	8.40E5	0.00E0	2.40E7	0.00E0
.07E7	0.00E0	9.71E5	-1.07E7	0.00E0
37E9	2.40E7	-1.07E7	5.33E9	0.00E0

Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up
CAMBIO FILA 3.				
[24000000. 10666667. 5333333333. 0. ▶				
FILA 3. restada de FILA 1. multiplicada				
por 24000000. entre 840000.				

Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up
k4 =	840000. 0.	24000000. -60		
	0. 971111. 10666667. 0.			
	0. 10666667. 4647619048. 17			
	0. 0. 17142857. 41			
	0. -71111. -10666667. 0.			
	0. 10666667. 1066666667. 24			

Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up
RESULTA: NUEVA FILA 5.				
[0. 0. -9885584. 0. 965904. -9885584▶				

Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up
k10 =	840000. 0.	24000000. -60		
	0. 971111. 10666667. 0.			
	0. 0. 4530456576. 171			
	0. 0. 17142857. 411			
	0. 0. -9885584. 0.			
	0. 0. 949504195. 240			

Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up
	840000. 0.	24000000. -600000.		
	0. 971111. 10666667. 0.			
	0. 0. 4530456576. 17142857			
	0. 0. 0. 346561.			
	0. 0. 0. 0.			
	0. 0. 0. 0.			

Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up
Vector de cargas Triangularizado [F]				
[10000.				
0.				
-285714.				
8224.				
-1511.				
-440482.]				

Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up
Ecuaciones Matriciales				
840000. · u2 - 600000. · u3 + 24000000. · 02 =				
971111. · u2 - 71111. · u3 + 10666667. · 02 + 11				
17142857. · u3 - 9885584. · u3 + 4530456576. ▶				
346561. · u3 + 37406. · u3 + 20407158. · 03 = 8:				
940296. · u3 + 2. E -7 · 02 - 10016390. · 03 = -1!				
2. E -6 · 02 + 3708804285. · 03 = -440482.				

Presentación final de la matriz de desplazamientos. Como se ve, la presentación de decimales y formato de presentación puede ser la que se quiera, y prueba de ello es la mezcla que se ha hecho en este ejemplo con varios formatos.

Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up
Se ha practicado la técnica de				
remonte de abajo hacia arriba				
resultando las soluciones una tras una				
La solución al sistema planteado				
que son los desplazamientos es:				
u2 = .0387 and u3 = .0310 and v2 = .0029 ▶				

Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up
DESPLAZAMIENTOS NODALES				
nudo1	nudo2	nudo3	nudo4	
0.000000	.038697	.031034	0.000000	
0.000000	.002872	-.002872	0.000000	
0.000000	-.000162	-.000119	0.000000	

Finalmente, especificar dos errores de este problema encontrados en el libro. El elemento de la matriz de rigidez local 3 en la fila 6ª, columna 3ª no es 1.6 E7, sino 1.6 E9. Igualmente el elemento de la matriz de rigidez global 3 en la columna 4ª, fila 4ª hay que cambiar de 2.4 E 7 a 2.4 E5, y en la fila 6ª de la misma columna pasaría de 2.4 E7 a -2.4 E7, tal como muestran las pantallas siguientes, en formato de presentación decimal parecido al empleado en el libro.

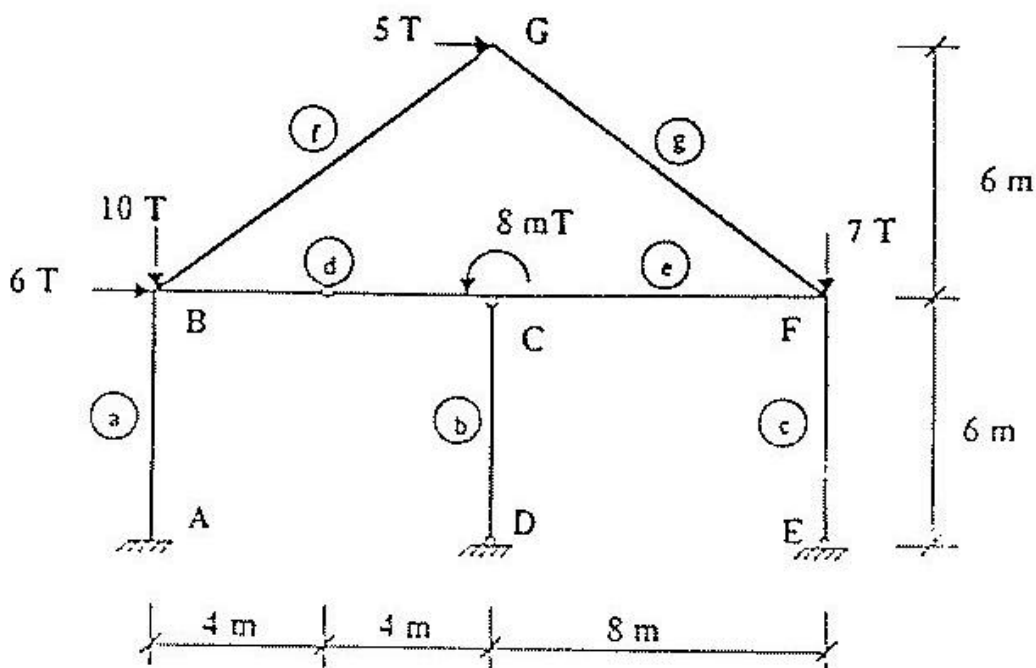
Matriz	Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up
Matriz local [k](3) calculada					
9.e5	0.e0	0.e0	-9.e5	0.e0	0.
0.e0	2.4e5	2.4e7	0.e0	-2.4e5	2.
0.e0	2.4e7	3.2e9	0.e0	-2.4e7	1.
-9.e5	0.e0	0.e0	9.e5	0.e0	0.
0.e0	-2.4e5	-2.4e7	0.e0	2.4e5	-2
0.e0	2.4e7	1.6e9	0.e0	-2.4e7	3.
MEF2	DEG APPROX	FUNC 12/30	PAUSE		

Matriz	Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up
Matriz global [K](3) calculada					
2.4e5	0.e0	2.4e7	-2.4e5	0.e0	2.
0.e0	9.e5	0.e0	0.e0	-9.e5	0.
2.4e7	0.e0	3.2e9	-2.4e7	0.e0	1.
-2.4e5	0.e0	-2.4e7	2.4e5	0.e0	-2
0.e0	-9.e5	0.e0	0.e0	9.e5	0.
2.4e7	0.e0	1.6e9	-2.4e7	0.e0	3.
MEF2	DEG APPROX	FUNC 12/30	PAUSE		

PROBLEMA N° 3.

Problema n° 5 de los ejercicios de la 1ª parte del libro "Teoría General del MEF", de Juan José Benito y Ramón Álvarez, ETSII- UNED, y también hoja n° 95 de problemas del 2º parcial enviado por profesores de Análisis de Estructuras.

Plantear la ecuación $P=K*d$ para la obtención de los movimientos en todos los nudos, para la estructura reticulada plana que se indica en la figura.



Datos para todas las barras:

Sección constante $A = 0,30 * 0,50 \text{ m}^2$; módulo elasticidad $E = 2,0 * 10^6 \text{ T/m}^2$