Sistemas de ecuaciones lineales con SisEcuac 2.1.

1. Introducción.

SisEcuac 2.1 es un programa para resolver sistemas de ecuaciones lineales paso a paso, mediante dos métodos: la regla de Cramer y el método de Gauss. El programa le presentará todas las operaciones en pantalla como si Ud. estuviese resolviendo el ejercicio a mano.

En general, un sistema con m ecuaciones lineales y n incógnitas puede ser escrito en forma ordinaria como:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots+ & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \cdots+ & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \cdots+ & a_{mn}x_n = & b_m \end{array}$$

donde $x_1, \dots, x_n$ son las variables incógnitas, los valores $a_{ij} \in$ F son los coeficientes del sistema sobre el cuerpo $F[= \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots]$, mientras que $b_1, \dots, b_m$ son los términos independientes.

Tanto a_{ij} como $b_1, \dots, b_m$ pueden ser números o parámetros o expresiones tanto lineales como no lineales, dado que la linealidad debe ser únicamente sobre las variables incógnitas.

Ejemplos:

$$a_{ij} = [5a + sen(b)]; \quad a_{ji} = 2; \quad b_j = c \cdot d^2$$

Obsérvese que las expresiones de los ejemplos, en última instancia, son números en $\mathbb{R}$ pues no existen incógnitas, por lo que se mantiene la linealidad.

SisEcuac 2.1 presenta 2 limitaciones:

- Máximo 15 caracteres por cada celda en matrices.
- Máximo de 5 variables por celda. Ejemplo: *a+b+c+d+e* es válido, pero *a+b+c+d+e+f* no lo es.

Obviamente alguna de las variables incógnitas de $x_1, \dots, x_n$ puede no existir en la expresión del sistema, con lo que tampoco existirá su coeficiente asociado de la matriz $[M]$.

Es posible reescribir el sistema separando con coeficientes en notación matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

donde:

- la 1ª matriz $[M]$ es la de los coeficientes del sistema.
- la 2ª matriz $\{X\}$ (vector columna) es la de las variables del sistema.
- la 3ª matriz $\{Ind\}$ (vector columna) es la de los términos independientes.

Esta forma matricial puede expresarse también en forma reducida como:

$$[M]\{X\} = \{Ind\}$$

Se llama matriz ampliada M_{amp} a la que incluye la matriz de coeficientes y al vector de términos independientes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Una matriz es cuadrada si cumple que $m = n$ y entonces se dice que es $n\ x\ n$.
Una matriz es regular, si su determinante es no nulo.
Una matriz es singular, en caso contrario, si su determinante es nulo. Este tipo de matriz no admite inversa.

En definitiva un sistema es lineal si cumple las condiciones de linealidad:

- todas las variables están elevadas a la potencia 1.
- no se multiplican ni dividen entre sí las variables, ni están dentro del argumento de otras funciones matemáticas: trigonométricas, logarítmicas, etc.
- pueden contener parámetros que multiplican o dividan a cada una de las variables.

Ejemplo de un sistema lineal:

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax - y + z - t = 0} \\ \boldsymbol{x - y - 3z + t = 0} \\ \boldsymbol{2x - by + z - 2t = 0} \\ \boldsymbol{x + y - bz + t = 0} \end{cases}$$

Ejemplo de un sistema no lineal:

$$\begin{cases} \boldsymbol{ayx^2 - \frac{y}{x} + tln(z) - sin(t) = 0} \\ \boldsymbol{x - y - 3z + t = 0} \\ \boldsymbol{2x - by + z - 2t = 0} \\ \boldsymbol{x + y - bz + t = 0} \end{cases}$$

2. Tipos de sistemas.

Los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar según el número de soluciones que puedan presentarse. De acuerdo con ese caso se pueden encontrar los siguientes casos:

- **Sistema incompatible:** si no tiene ninguna solución.
- **Sistema compatible:** si tiene alguna solución, en este caso además puede distinguirse entre:
  - **Sistema compatible determinado** cuando tiene un número finito de soluciones.
  - **Sistema compatible indeterminado** cuando admite un conjunto infinito de soluciones.

También se pueden clasificar, según sean los términos independientes en:

- **Sistema no homogéneo:** los términos del vector columna {Ind} son no todos nulos.
- **Sistema homogéneo:** los términos del vector columna {Ind} son todos nulos.

En base a la primera forma de clasificarse, vamos a establecer las condiciones matemáticas para que se encuadre todo sistema de ecuaciones lineal. Como se va a ver, habrá que separar entre los dos tipos de sistemas: homogéneos y no homogéneos. Además, habrá de tenerse en cuenta si la matriz es cuadrada o no.

Sistema incompatible.

- **Sistemas no homogéneos.**

Si llamamos $r(M)$ al rango de M y $r(M_{amp})$ al rango de la matriz ampliada M_{amp},

la condición necesaria y suficiente para que un sistema no homogéneo sea INCOMPATIBLE es que debe verificar:

$$Sistema\ no\ homogéneo\ incompatible\ (m\ x\ n)\ \leftrightarrow\ r(M) < r(M_{amp})$$

Para matrices cuadradas, se cumple la siguiente condición suficiente:

$$Sistema\ no\ homogéneo\ incompatible\ (n\ x\ n)\ \rightarrow\ |M| = 0$$

Obsérvese que por no cumplirse la condición necesaria, a priori, no sabremos la incompatibilidad en este tipo de sistemas si únicamente tenemos el dato del determinante.

- **Sistemas homogéneos.**

Ningún sistema homogéneo es incompatible.

Sistema compatible determinado.

- **Sistemas no homogéneos.**

La condición necesaria y suficiente para que un sistema no homogéneo sea COMPATIBLE DETERMINADO es que debe verificar, las condiciones:

$$Sistema\ no\ homogéneo\ compatible\ (m\ x\ n) \leftrightarrow\ \ r(M) = r(M_{amp})$$

$$Sist.\ no\ homogéneo\ compatible\ determinado\ (m\ x\ n) \leftrightarrow\ \ r(M) = nº\ incógnitas$$

Nótese que en matrices $m\ x\ n$ se incluyen, por extensión, también a las cuadradas.

Como se ve, con la 1ª condición solo sabremos si es compatible, mientras que con la 2ª sabremos si es compatible determinado.

Para matrices cuadradas, exclusivamente, se cumple la siguiente condición necesaria y suficiente:

$$Sistema\ no\ homogéneo\ compatible\ determinado\ (n\ x\ n)\ \leftrightarrow\ \ |M| \neq 0$$

- **Sistemas homogéneos.**

Para este tipo de sistemas, la solución es siempre la trivial, es decir:

$$x_i = 0\ \ \forall i = 1, \dots, n$$

La condición en matrices $m\ x\ n$ (y por extensión, las cuadradas) es:

$$Sist. homogéneo\ compatible\ determinado\ (m\ x\ n) \leftrightarrow\ \ r(M) < nº\ incógnitas$$

Para matrices cuadradas, se cumple la siguiente condición necesaria y suficiente:

$$Sistema\ homogéneo\ compatible\ determinado\ (n\ x\ n)\ \leftrightarrow\ \ |M| \neq 0$$

Sistema compatible indeterminado.

- **Sistemas no homogéneos.**

La condición necesaria y suficiente para que un sistema no homogéneo sea COMPATIBLE INDETERMINADO es que debe verificar, las condiciones:

$$Sistema\ no\ homogéneo\ compatible\ (m\ x\ n) \leftrightarrow\ \ r(M) = r(M_{amp})$$

$$Sist.\ no\ homog.\ compatible\ indeterminado\ (m\ x\ n) \leftrightarrow\ \ r(M) < nº\ incógnitas$$

Nótese que en matrices $m\ x\ n$ se incluyen, por extensión, también a las cuadradas.

Como se ve, con la 1ª condición solo sabremos si es compatible, mientras que con la 2ª sabremos si es compatible indeterminado.

Para matrices cuadradas, exclusivamente, se cumple la siguiente condición suficiente:

$$Sistema\ no\ homogéneo\ compatible\ indeterminado\ (n\ x\ n)\ \rightarrow\ \ |M| = 0$$

Obsérvese que por no cumplirse la condición necesaria, a priori, no sabremos la indeterminación o no del sistema o si es o no compatible en este tipo de sistemas si únicamente tenemos el dato del determinante, dado que también se verifica como hemos señalado antes:

$$Sistema\ no\ homogéneo\ incompatible\ (n\ x\ n)\ \rightarrow\ \ |M| = 0$$

- **Sistemas homogéneos.**

Para este tipo de sistemas, la solución no es la trivial, es decir, existe al menos un x_i tal que:

$$x_i \neq 0\ \ i \in 1, \dots, n$$

La condición en matrices $m\ x\ n$ (y por extensión, las cuadradas) es:

$$Sist. homogéneo\ compatible\ indeterminado\ (m\ x\ n) \leftrightarrow\ \ r(M) = nº\ incógnitas$$

Para matrices cuadradas, se cumple la siguiente condición necesaria y suficiente:

$$Sistema\ homogéneo\ compatible\ determinado\ (n\ x\ n)\ \leftrightarrow\ \ |M| = 0$$

3. Casos y discusión del sistema.

Si existen parámetros en las matrices del sistema, el sistema se discutirá con casos en función de valores de esos parámetros. Esto es así porque el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada pueden variar en función de los valores que tomen estos parámetros.

Si solo existen valores numéricos, el sistema no presenta casos y tiene solución única (si es compatible).

Consulten para su aprobación en:

ingenieroindustrialmecanico@gmail.com

gomezvega@hotmail.com